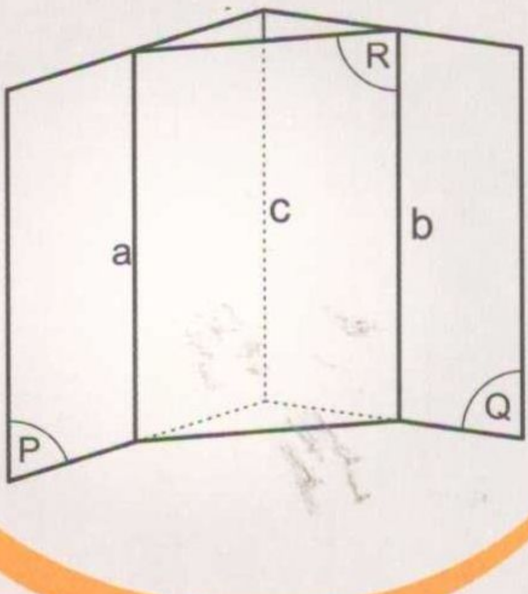
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11 NÂNG CAO



ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

Giải bài tập
HÌNH HỌC 11
NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty Sách hoa hồng

Lời nói đầu

Theo tinh thần đổi mới phương pháp dạy và học hiện nay, chúng tôi biên soạn quyển sách này theo cấu trúc như sau:

- ***Tóm tắt lí thuyết**: Giúp học sinh nắm vững và củng cố kiến thức cơ bản bài học.*
- ***Hệ thống bài tập**: Giúp học sinh vận dụng và rèn luyện kĩ năng tư duy toán học.*
- *Đặc biệt có phần **Bài tập làm thêm** giúp học sinh làm quen với cách vận dụng kiến thức toán đã học để giải quyết tốt các dạng bài tập thường gặp trong các kì kiểm tra, thi cử.*

Quý phụ huynh có thể tham khảo quyển sách này để giúp đỡ, kiểm tra việc ôn tập ở nhà của con em mình. Quý thầy cô có thể xem đây như là tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

CHƯƠNG 1 **PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG**

§1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

§2. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Phép biến hình :

Một quy tắc với mỗi điểm M trong mặt phẳng xác định một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy gọi là một phép biến hình.

$$f : M \mapsto M'$$

M' là ảnh của M qua phép biến hình f.

2. Ảnh của một hình :

Cho hình $\mathcal{H}$ và phép biến hình f.

$\mathcal{H}' = f(\mathcal{H}) = \{M' / M' = f(M)\}$ *gọi là ảnh của hình $\mathcal{H}$ qua phép biến hình f.*

3. Phép tịnh tiến :

Cho vectơ $\vec{u}$, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$, kí hiệu là $T_{\vec{u}}$ là phép biến hình biến điểm M thành M' sao cho : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

4. Tính chất :

a) $T_{\vec{u}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$

$T_{\vec{u}}(M) = M'$, $T_{\vec{u}}(N) = N'$ thì $M'N' = MN$.

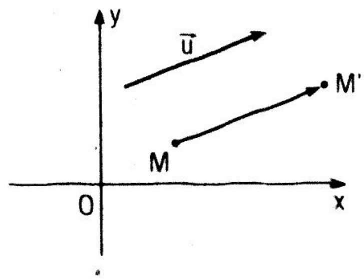
b) $T_{\vec{u}}$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

c) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (a; b)$

Giả sử $T_{\vec{u}}M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$



Ta có : $\begin{cases} x = x + a \\ y = y + b \end{cases}$

5. Phép dời hình :

a) Định nghĩa

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

b) Định lí

Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì: d trùng d' ? d song song d' ? d cắt d' ?*

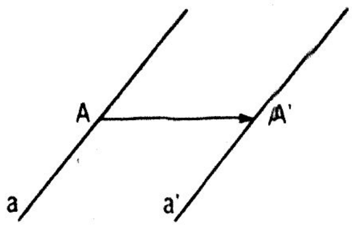
Giải

- Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d thì d trùng với d'.
- Nếu $\vec{u}$ không là vetơ chỉ phương của d thì d // d'.
- d không bao giờ cắt d'.

2. *Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.*

Giải

Lấy điểm A trên a thì với mỗi điểm A' trên a', phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến a thành a'. Đó là tất cả những phép tịnh tiến cần tìm.



3. *Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ theo vectơ $\vec{u}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ theo vectơ $\vec{v}$. Với điểm M bất kì, $T_{\vec{u}}$ biến M thành M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành điểm M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến M thành M'' là một phép tịnh tiến.*

Giải

Ta có $T_{\vec{u}} : M \to M'$

$T_{\vec{v}} : M' \to M''$

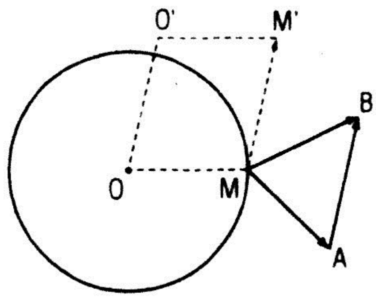
Suy ra : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$.

Do đó : $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}$

Vậy phép biến hình biến M thành M'' là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

4. *Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.*

Giải



Ta có $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ nên phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ biến M thành M'. Nếu gọi O' là ảnh của O qua phép tịnh tiến T, tức $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$ thì quỹ tích M' là đường tròn tâm O' có bán kính bằng bán kính đường tròn (O).

5. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x ; y) thành M'(x' ; y'), trong đó :*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$$

a) Cho hai điểm $M(x_1 ; y_1)$, $N(x_2 ; y_2)$ và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F. Hãy tìm toạ độ của M' và N'.

b) Tính khoảng cách d giữa M và N; khoảng cách d' giữa M' và N'.

c) Phép F có phải là phép dời hình không ?

d) Khi α = 0, chứng tỏ rằng F là phép tịnh tiến.

Giải

a) M' có toạ độ $(x'_1 ; y'_1)$ với : $\begin{cases} x'_1 = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + a \\ y'_1 = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha + b. \end{cases}$

N' có toạ độ $(x'_2 ; y'_2)$ với : $\begin{cases} x'_2 = x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha + a \\ y'_2 = x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha + b. \end{cases}$

b) Ta có : $d = MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,

$d' = M'N' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$

$= \sqrt{[(x_1 - x_2)\cos\alpha - (y_1 - y_2)\sin\alpha]^2 + [(x_1 - x_2)\sin\alpha + (y_1 - y_2)\cos\alpha]^2}$

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2\cos^2\alpha + (y_1 - y_2)^2\sin^2\alpha + (x_1 - x_2)^2\sin^2\alpha + (y_1 - y_2)^2\cos^2\alpha}$

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

c) Từ kết quả ở câu b) suy ra M'N' = MN và do đó F là phép dời hình.

d) Khi $\alpha = 0$, ta có $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$

Vậy, F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(a ; b)$.

6. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây :*

- *Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm $M(x ; y)$ thành điểm $M'(y ; -x)$.*
- *Phép biến hình F_2 biến mỗi điểm $M(x ; y)$ thành điểm $M'(2x ; y)$.*

Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình?

Giải

■ Lấy hai điểm bất kỳ $M = (x_1 ; y_1)$ và $N(x_2 ; y_2)$, khi đó

$$MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ảnh của M, N qua F_1 lần lượt là $M' = (y_1 ; -x_1)$ và $N' = (y_2 ; -x_2)$.

Như vậy ta có : $M'N' = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (-x_1 + x_2)^2}$.

Suy ra M'N' = MN, vậy F_1 là phép dời hình.

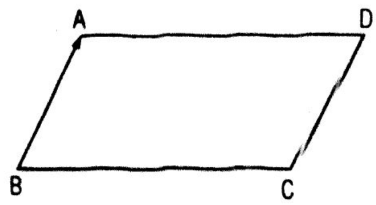
■ Ảnh của M, N qua F_2 lần lượt là $M' = (2x_1 ; y_1)$ và $N' = (2x_2 ; y_2)$.

Như vậy ta có : $M'N' = \sqrt{4(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Từ đó suy ra nếu $x_1 \neq x_2$ thì $M'N' \neq MN$, vậy F_2 không phải là phép dời hình.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, B cố định, còn đỉnh C thay đổi trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích đỉnh D.*



Hướng dẫn : ABCD là hình bình hành nên : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$ biến C thay đổi trên đường tròn (O) thì quỹ tích đỉnh D là đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.

2. *Cho hai đường tròn (O) và (O') và hai điểm A, B. Tìm điểm M trên (O) và điểm M' trên (O') sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.*

Hướng dẫn : M cần tìm là giao điểm (nếu có) của (O') với đường tròn (O_1) ảnh của (O) qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$.

3. *Cho đường tròn (O ; R) và một điểm I cố định. AB là đường kính thay đổi của (O). Đường thẳng qua B và song song với OI cắt đường thẳng AI tại D. Tìm quỹ tích điểm D.*

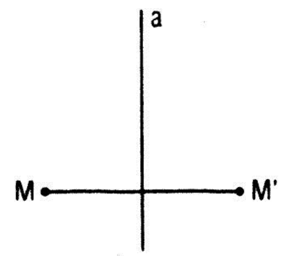
Hướng dẫn : $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{OI}$.

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa phép đối xứng trục :

Điểm M' gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng a nếu a là đường trung trực của đoạn thẳng MM'. Nếu M nằm trên a thì ta xem M đối xứng với chính nó qua a.



Định nghĩa 1

Phép đối xứng qua đường thẳng a, kí hiệu là $Đ_a$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua a.

Đường thẳng a gọi là trục của phép đối xứng, hay đơn giản là trục đối xứng.

2. Định lí :

Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

3. Trục đối xứng của một hình :

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến $\mathcal{H}$ thành chính nó, tức là : $Đ_d(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

7. *Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ (a là trục đối xứng), đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Hãy trả lời các câu hỏi sau :*

a) Khi nào thì d song song với d'?

b) Khi nào thì d trùng với d'?

c) Khi nào thì d cắt d'? Giao điểm của d và d' có tính chất gì?

d) Khi nào d vuông góc với d'?

Giải

a) Khi d // a thì d // d'.

b) Khi d vuông góc với a hoặc d trùng với a thì d trùng với d'.

c) Khi d cắt a nhưng không vuông góc với a. Khi đó giao điểm của d và d' nằm trên a.

d) Khi góc giữa d và a bằng 45^0 thì d ⊥ d'.

8. *Trong mặt phẳngtoạ độ Oxy, cho các đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ lần lượt có phương trình :*

$$(\mathscr{C}_1) : x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0;$$

$$(\mathscr{C}_2) : x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0.$$

Viết phương trình ảnh của các đường tròn trên qua phép đối xứng có trục Oy.

Giải

Ta có $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{37}{4}$

$(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I_1(2 ; -\frac{5}{2})$ và bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{37}}{2}$

Gọi I'_1 là ảnh của I_1 qua phép đối xứng có trục Oy thì $I'_1(-2 ; -\frac{5}{2})$.

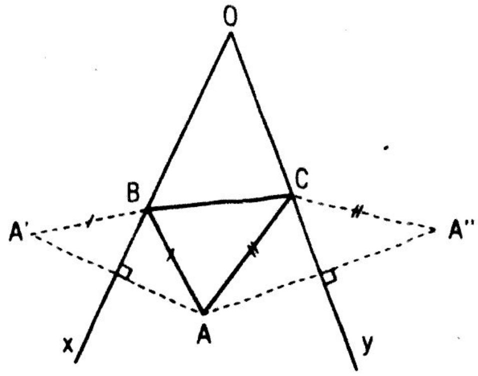
Vậy phương trình ảnh $(\mathscr{C}'_1)$ của $(\mathscr{C}_1)$ qua phép đối xứng trục Oy là :

$$(x + 2)^2 + (y + \frac{5}{2}) = \frac{37}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$$

Tương tự $(\mathscr{C}'_2) : x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$ chính là phương trình ảnh của $(\mathscr{C}_2)$

9. *Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.*

Giải



Xét tam giác bất kì ABC có B và C lần lượt nằm trên hai tia Ox và Oy. Gọi A' và A" là các điểm đối xứng với điểm A lần lượt qua các đường thẳng Ox và Oy. Ta có AB = A'B và AC = A"C (do các ΔABA' và ΔACA" là các tam giác cân). Gọi 2p là chu vi của tam giác ABC thì :

$$2p = AB + BC + CA = A'B + BC + CA" \geq A'A"$$

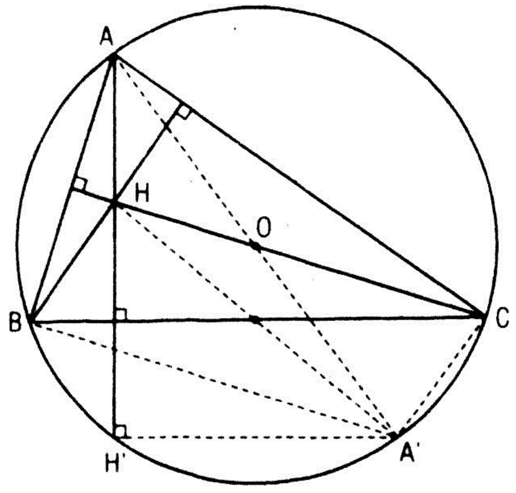
Dấu "=" xảy ra khi bốn điểm A', B, C, A" thẳng hàng. Suy ra để chu vi tam giác ABC bé nhất thì phải lấy B và C lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng A'A" với hai tia Ox và Oy (các giao điểm đó tồn tại vì góc xOy nhọn).

10. *Cho hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn (O ; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.*

Hướng dẫn : Khi BC không phải là đường kính, gọi H' là giao điểm của đường thẳng AH với đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng H đối xứng với H' qua đường thẳng BC.

Giải

Trường hợp BC là đường kính thì H trùng A, do đó H nằm trên đường tròn cố định (O ; R).



Xét trường hợp BC không là đường kính. Giả sử đường thẳng AH cắt đường tròn (O ; R) tại H'. Như vậy với mỗi điểm A ∈ (O ; R), khác với B và C thì ta xác định điểm H' ∈ (O ; R). Gọi AA' là đường kính của đường tròn (O ; R) thì A'B // CH (vì cùng vuông góc với AB) và A'C // BH (vì cùng vuông góc AC) nên A'BHC là hình bình hành. Vậy BC đi qua trung điểm của HA'. Mặt khác BC // A'H' (vì cùng vuông góc với AH) nên BC cũng đi qua trung điểm của HH', do đó H và H' đối xứng với nhau qua BC. Nếu gọi Đ là đối xứng có trục là đường thẳng BC thì Đ biến H' thành H. Nhưng H' luôn luôn nằm trên (O ; R) nên H nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn (O ; R) qua phép đối xứng trục Đ.

Cách khác : Gọi H' là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh tứ giác ABH'C nội tiếp, từ đó suy ra H' nằm trên (O ; R)

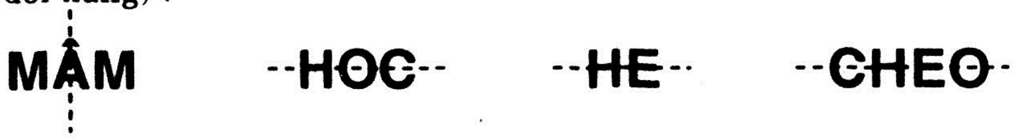
11. *a) Chỉ ra trục đối xứng (nếu có) của mỗi hình sau đây (mỗi hình là một từ bao gồm một số chữ cái) :*

MÂM, HOC, NHANH, HE, SHE, COACH, IS, IT, SOS, CHEO

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số chẵn luôn có trục đối xứng.

Giải

a) Các hình có trục đối xứng là những từ sau đây (các từ còn lại không có trục đối xứng) :



b) Trục Oy luôn là trục đối xứng của đồ thị hàm số chẵn $y = f(x)$.

Thật vậy, nếu điểm $M(x ; y)$ thuộc đồ thị, tức là $y = f(x)$ thì điểm đối xứng với M qua Oy là điểm $M'(-x ; y)$ cũng thuộc đồ thị vì :

$$f(-x) = f(x) = y.$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 44$ Viết phương trình ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép đối xứng có trục Ox.*

Đáp số : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

2. *Tam giác MND gọi là nội tiếp trong tam giác ABC nếu ba đỉnh của MND nằm trên ba cạnh của tam giác ABC. Hãy tìm tam giác nội tiếp tam giác ABC cho trước sao cho nó có chu vi nhỏ nhất.*

Hướng dẫn : D là chân đường cao ΔABC; M, N lần lượt là giao điểm của D_1D_2 với AB và BC (với D_1, D_2 là các điểm đối xứng của D qua AB và BC).

3. *Cho tam giác ABC với trực tâm H.*

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HBC, HCA có bán kính bằng nhau.

b) Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm các đường tròn nói trên. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm O_1, O_2, O_3 bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn : Các đường tròn ngoại tiếp ΔHAB, ΔHBC, ΔHCA có bán kính bằng với đường tròn ngoại tiếp (O) của ΔABC do điểm đối xứng của H qua các cạnh ΔABC nằm trên (O).

§4. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa phép quay :

Cho điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình $Q : M \mapsto M'$ sao cho $OM = OM'$; $(OM ; OM') = \varphi$; $Q(O) = O$ được gọi là phép quay tâm O góc quay φ, kí hiệu $Q_{(O\,;\,\varphi)}$.

2. Định lí :

Phép quay là một phép dời hình.

3. Phép đối xứng tâm :

a) Phép đối xứng qua điểm O, kí hiệu là $Đ_O$ là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là :

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}.$$

Điểm O gọi là tâm của phép đối xứng, hay đơn giản là tâm đối xứng.

b) Biểu thức toạ độ

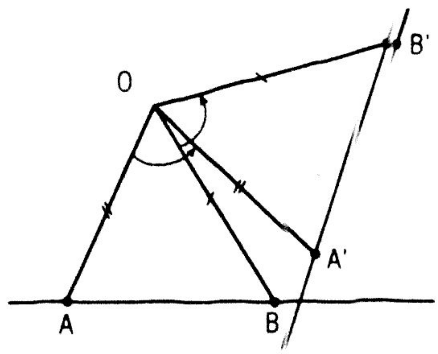
Trong hệ toạ độ Oxy cho điểm $I(a\,;\,b)$. Nếu phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm $M(x\,;\,y)$ thành điểm $M'(x'\,;\,y')$ thì :

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Điểm O gọi là tâm đối xứng của một hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó, tức $Đ_O(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

12. *Cho phép quay Q tâm O với góc quay φ và cho đường thẳng d. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua phép quay Q.*

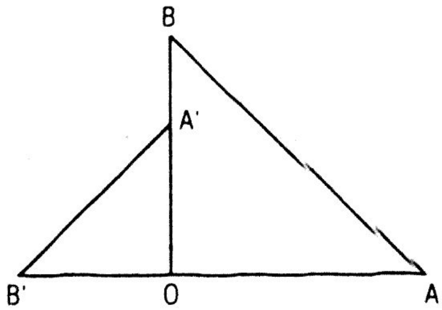


Giải

Ảnh d' của đường thẳng d qua phép quay $Q_{(O, \varphi)}$ có thể dựng như sau :

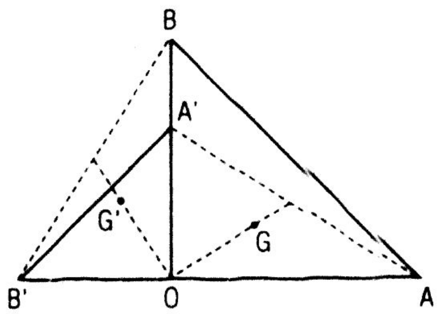
Lấy hai điểm A, B phân biệt trên d, rồi dựng ảnh A', B' của chúng. Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua A' và B'.

13. *Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tam giác vuông cân.*



Giải

Gọi Q là phép quay tâm O, góc quay $\frac{\pi}{2}$ (bằng góc lượng giác (OA, OB)). Khi đó Q biến A thành B và biến A' thành B', tức là biến tam giác OAA' thành tam giác OBB'.



Bởi vậy Q biến G (trọng tâm tam giác OAA') thành G' (trọng tâm tam giác OBB'). Suy ra OG = OG' và $\widehat{GOG'} = \frac{\pi}{2}$. Vậy GOG' là tam giác vuông cân tại đỉnh O.

Chú ý : Phép quay Q biến trọng tâm G tam giác ABC thành trọng tâm G' của tam giác A'B'C' ảnh của ΔABC qua Q được suy ra từ phép quay Q biến trung điểm I của đoạn thẳng AB thành trung điểm I' của đoạn thẳng A'B' ảnh của AB qua Q.

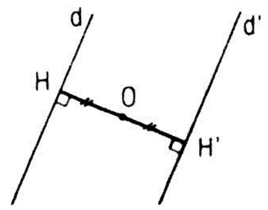
14. *Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chứng minh :*

a) Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, O cách đều d và d';

b) Hai đường d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

Giải

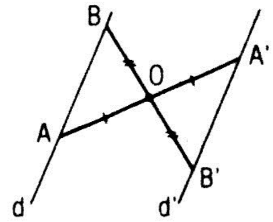
a) Kẻ OH ⊥ d (H ∈ d) thì vì d không đi qua O nên H không trùng với O. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến H thành H' thì O là trung điểm của HH', và biến đường thẳng d thành đường thẳng d' vuông góc với OH' tại H'. Suy ra d và d' song song, cách đều điểm O.



b) Nếu d không đi qua điểm O thì theo câu a), d' // d nên d' không trùng với d. Nếu d đi qua O thì mọi điểm M ∈ d biến thành điểm M' ∈ d. Vậy d' trùng với d.

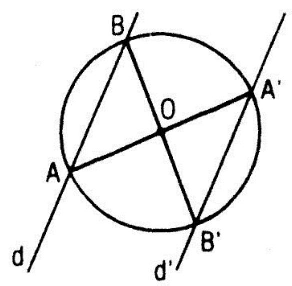
15. *Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_O$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.*

Giải



Cách dựng ảnh d' của d như sau : Lấy hai điểm A, B phân biệt trên d rồi dựng ảnh A', B' của chúng. Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua A' và B'.

Ta có thể dựng cụ thể như sau : Dựng đường tròn (O ; R) sao cho nó cắt d tại hai điểm phân biệt A, B. Dựng các đường thẳng AO và BO, chúng cắt đường tròn đó lần lượt tại A' và B'. Dựng đường thẳng d' đi qua A' và B'. Phép dựng trên đây sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.



16. *Chỉ ra các tâm đối xứng của các hình sau đây :*

a) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau;

b) Hình gồm hai đường thẳng song song;

c) Hình gồm hai đường tròn bằng nhau;

d) Đường elip;

e) Đường hypebol.

Giải

a) Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường thẳng.

b) Tâm đối xứng là những điểm cách đều hai đường thẳng.

c) Tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm đường tròn.

d) Trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm của elip.

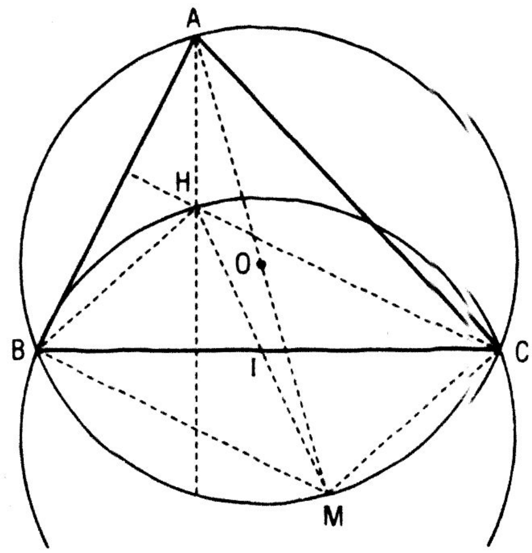
e) Trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm của hypebol.

17. *Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O ; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.*

Hướng dẫn : Gọi I là trung điểm của BC. Hãy vẽ đường kính AM của đường tròn rồi chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng HM.

Giải

Ta vẽ đường kính AM của đường tròn. Khi đó BH // MC (vì cùng vuông góc với AB) hay BHCM là hình bình hành. Nếu gọi I là trung điểm của BC thì I cố định và cũng là trung điểm của MH.



Vậy phép đối xứng qua điểm I biến M thành H.

Khi A chạy trên đường tròn (O ; R) thì M chạy trên đường tròn (O ; R). Do đó, H nằm trên đường tròn là ảnh của đường tròn (O ; R) qua phép đối xứng tâm với tâm I.

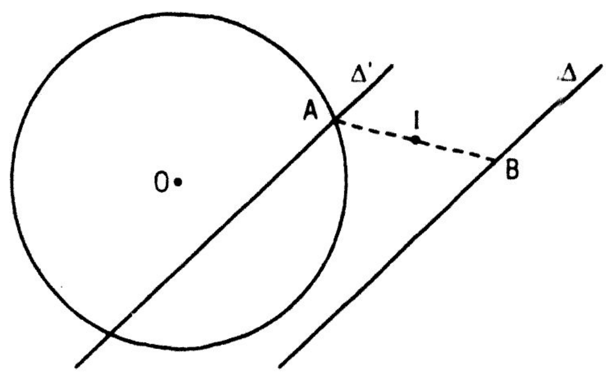
18. *Cho đường tròn (O ; R), đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên (O ; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.*

Giải

Giả sử ta đã có điểm A trên đường tròn (O ; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm B thành điểm A nên biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' đi qua A. Mặt khác A lại nằm trên (O ; R) nên A phải là giao điểm của Δ' và (O ; R).

Suy ra cách dựng :

Dựng đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$. Lấy A là giao điểm (nếu có) của Δ' và (O ; R), còn B là giao điểm của đường thẳng AI và đường thẳng Δ.



Số nghiệm hình là số giao điểm của Δ' và (O ; R).

19. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ : $ax + by + c = 0$ và điểm $I(x_0 ; y_0)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ'. Viết phương trình của Δ'.*

Giải

Giả sử $M(x , y) \in \Delta$ và $M'(x' , y') \in \Delta'$ và I là trung điểm của MM' nên :

$$x + x' = 2x_0,\ y + y' = 2y_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2x_0 - x' \\ y = 2y_0 - y' \end{cases}$$

$M(x , y) \in \Delta$ nên $a(2x_0 - x') + b(2y_0 - y') + c = 0$

$\Leftrightarrow 2ax_0 + 2by_0 - ax' - by' + c = 0$

$\Leftrightarrow ax' + by' + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0$

Vậy M' nằm trên đường thẳng ảnh Δ' có phương trình :

$$ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho đoạn thẳng AC và B trên đoạn AC (B khác A và C). Về cùng một phía đối với đường thẳng AC dựng hai tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác đều.*

Hướng dẫn : Sử dụng phép quay $Q(B, -\frac{\pi}{3})$

2. *Cho ΔABC. Dựng các hình vuông ABDE và ACFG sao cho D, C thuộc mặt phẳng đối nhau bờ AB, B và F thuộc hai mặt phẳng đối nhau bờ AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm CE và BG. Chứng minh AMN là tam giác vuông cân.*

Hướng dẫn : Sử dụng phép quay $Q(A , -\frac{\pi}{2})$

3. *Cho góc xAy và O là một điểm trong góc đó. Hãy dựng qua O đường thẳng cắt hai cạnh Ax, Ay theo thứ tự tại M, N sao cho O là trung điểm của MN.*

Hướng dẫn : Dựng điểm A' đối xứng với A qua O. Khi đó tứ giác AMA'N là hình bình hành.

4. *Dựng hình bình hành biết trung điểm ba cạnh của nó.*

Hướng dẫn : Dựng N' là điểm đối xứng của N qua trung điểm của MP.

§5. HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. <u>Định lí</u> :

Nếu ABC và A'B'C' là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

2. <u>Hai hình bằng nhau</u> :

Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Từ định nghĩa trên ta suy ra :

Nếu hình $\mathcal{H}_1$ bằng hình $\mathcal{H}_2$ và hình $\mathcal{H}_2$ bằng hình $\mathcal{H}_3$ thì hình $\mathcal{H}_1$ bằng hình $\mathcal{H}_3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

20. *Chứng tỏ hai hình chữ nhật cùng kích thước (cùng chiều dài và chiều rộng) thì bằng nhau.*

Giải

Giả sử hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' có AB = CD = A'B' = C'D', AD = BC = A'D' = B'C'. Khi đó ABC và A'B'C' là hai tam giác vuông bằng nhau, do đó có phép dời hình F biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'. Khi đó phép dời hình F biến trung điểm O của AC thành trung điểm O' của A'C'. Nhưng vì O và O' lần lượt cũng là trung điểm của BD và B'D' nên F cũng biến D thành D'. Vậy F biến ABCD thành A'B'C'D', nên theo định nghĩa, hai hình chữ nhật đó bằng nhau.

21. *a) Chứng tỏ rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.*

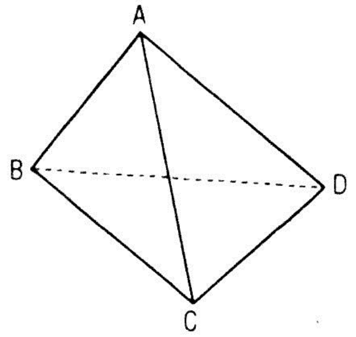
b) Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

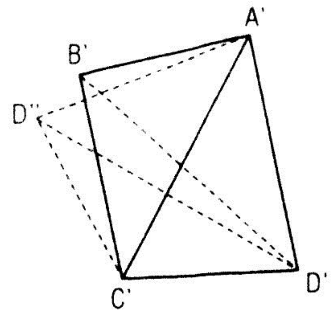
c) Hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau hay không?

Giải

a) Giả sử hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A' và AC = A'C'. Khi đó hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau nên có phép dời hình F biến ba điểm A, B, C lần lượt thành ba điểm A', B', C'. Gọi D'' là điểm đối xứng với điểm D' qua đường thẳng A'C' thì hai tam giác

A'C'D' và A'C'D'' bằng nhau và theo giả thiết, cùng bằng tam giác ACD. Bởi vậy phép F chỉ có thể biến điểm D thành điểm D' hoặc D'' (do phép dời hình bảo toàn độ dài đoạn thẳng).





Vì ABCD là tứ giác lồi nên hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau, A'B'C'D' cũng là tứ giác lồi nên hai đoạn thẳng A'C' và B'D' cắt nhau, và do đó hai đoạn thẳng A'C' và B'D'' không cắt nhau. Từ đó ta suy ra F biến D thành D'. Vậy F biến tứ giác ABCD thành tứ giác A'B'C'D' và do đó hai tứ giác đó bằng nhau.

b) Giả sử hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A' và góc ABC bằng góc A'B'C'. Khi đó AC = A'C' và ta đưa về trường hợp ở câu a).

c) Có thể không bằng nhau. Hai hình thoi có cạnh bằng nhau nhưng có thể là hai hình không bằng nhau (vì phép dời hình biến góc thành góc bằng nó).

22. *Đa giác lồi n cạnh gọi là n–giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai n–giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.*

Giải

Theo định nghĩa, hai n–giác đều bằng nhau thì cạnh bằng nhau. Ngược lại, giả sử hai n–giác đều $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ có cạnh bằng nhau. Khi đó nếu gọi O và O' lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đó thì hai tam giác OA_1A_2 và $O'A'_1A'_2$ bằng nhau.

Vậy có phép dời hình F biến tam giác OA_1A_2 thành tam giác $O'A'_1A'_2$. Vì hai tam giác OA_2A_3 và $O'A'_2A'_3$ cũng bằng nhau nên F biến điểm A_3 thành điểm A'_3 (vì A_3 không thể biến thành A'_1). Lập luận tương tự ta cũng có F biến các điểm A_4, ..., A_n lần lượt thành các điểm A'_4, ..., A'_n. Như vậy hai đa giác đều đã cho bằng nhau.

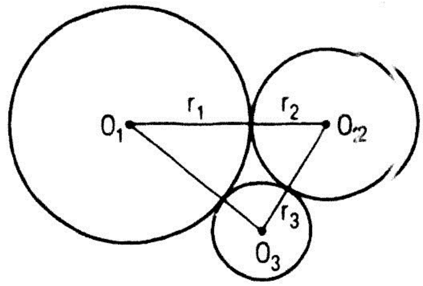
23. *Hình $\mathcal{H}_1$ gồm ba đường tròn $(O_1\,;\,r_1)$, $(O_2\,;\,r_2)$ và $(O_3\,;\,r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình $\mathcal{H}_2$ gồm ba đường tròn $(I_1\,;\,r_1)$, $(I_2\,;\,r_2)$, $(I_3\,;\,r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ bằng nhau.*

Giải

Ta có $O_1O_2 = r_1 + r_2 = I_1I_2$

$O_2O_3 = r_2 + r_3 = I_2I_3$

$O_3O_1 = r_3 + r_1 = I_3I_1$



Suy ra $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$

nên có phép dời hình F biến ba điểm O_1, O_2, O_3 lần lượt thành ba điểm I_1, I_2, I_3. Hiển nhiên khi đó F biến ba đường tròn (O_1, r_1), (O_2, r_2), (O_3, r_3) lần lượt thành ba đường tròn (I_1, r_1), (I_2, r_2), (I_3, r_3), tức là biến hình $\mathscr{H}_1$ thành hình $\mathscr{H}_2$. Vậy hai hình $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ bằng nhau.

24. *Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.*

Giải

Một đường thẳng đi qua tâm O của hình bình hành thì chia hình bình hành đó thành hai phần bằng nhau, vì phép đối xứng qua tâm O sẽ biến phần này thành phần kia. Bởi vậy, nếu cho hai hình bình hành, ta chỉ cần vẽ đường thẳng đi qua tâm của chúng thì đường thẳng đó sẽ chia mỗi hình bình hành thành hai phần bằng nhau.

Nếu tâm hai hình bình hành trùng nhau thì mọi đường thẳng đi qua tâm đó đều chia mỗi hình bình hành thành hai phần bằng nhau.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Cho hai hình thoi ABCD và A'B'C'D' có AC = A'C', BD = B'D'. Chứng minh rằng hai hình thoi đó bằng nhau.

Hướng dẫn : Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình thoi ABCD và A'B'C'D'. Rõ ràng hai tam giác OAB và O'A'B' bằng nhau nên có phép dời hình F biến O, A, B lần lượt thành O', A', B'. Vì F bảo tồn khoảng cách và thứ tự của các điểm nên F biến C thành C', D thành D'. Vậy F biến ABCD thành A'B'C'D', nghĩa là hai hình thoi đó bằng nhau.

§6. PHÉP VỊ TỰ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa :

Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k; Kí hiệu là $V_{(O;\,k)}$.

2. Các tính chất của phép vị tự :

▪ ***Định lí 1***

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ *và* $M'N' = |k|MN$.

▪ ***Định lí 2***

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.

▪ ***Hệ quả***

Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.

3. Ảnh của đường tròn qua phép vị tự :

▪ ***Định lí 3***

Phép vị tự tỉ số k biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

25. *Các phép sau đây có phải là phép vị tự không : phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đồng nhất, phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$?*

● ***Giải***

Phép đối xứng qua tâm O là phép vị tự tâm O tỉ số –1.

Phép đối xứng trục không phải là phép vị tự vì các đường thẳng nối cặp điểm tương ứng không đồng quy.

Phép đồng nhất là phép vị tự với tâm là điểm bất kì và tỉ số $k = 1$.

Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$ không phải là phép vị tự vì không có điểm nào biến thành chính nó.

26. *Các khẳng định sau đây có đúng không ?*

a) Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).

b) Phép vị tự không thể có quá một điểm bất động.

c) Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

Giải

a) Đúng. Tâm vị tự là điểm bất động.

b) Sai. Phép vị tự tỉ số $k = 1$ có mọi điểm đều là điểm bất động.

c) Đúng. Phép vị tự tâm O luôn có điểm bất động O, nếu nó còn điểm bất động nữa là M (tức là ảnh M' của M trùng với M) thì vì $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ nên $k = 1$. Vậy phép vị tự đó là phép đồng nhất nên mọi điểm đều bất động.

27. *Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau :*

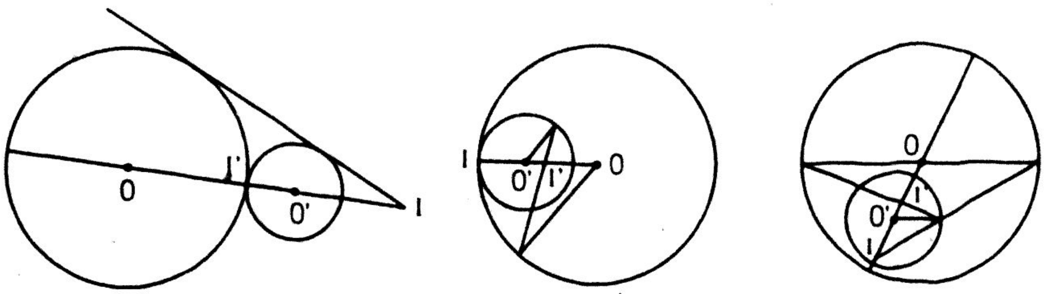
a) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

b) Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

c) Một đường tròn chứa đường tròn kia.

Giải

Gọi I là tâm vị tự ngoài, I' là tâm vị tự trong của hai đường tròn (O) và (O').



a) *b)* *c)*

a) Nếu (O) và (O') tiếp xúc ngoài thì tiếp điểm I' là tâm vị tự trong, giao điểm của OO' với tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O') (nếu có) là tâm vị tự ngoài (h.a))

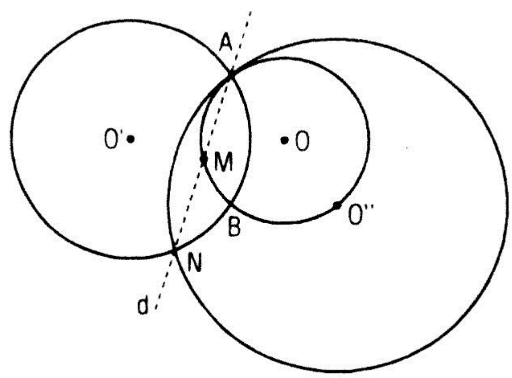
b) Nếu (O) và (O') tiếp xúc trong thì tiếp điểm I là tâm vị tự ngoài, tâm vị tự trong I' xác định như hình vẽ b).

c) Nếu (O) chứa (O') thì xác định I và I' như hình vẽ c) (đặc biệt, khi O trùng O' thì I và I' trùng O).

28. *Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.*

Giải

Giả sử đã dựng được đường thẳng d theo yêu cầu của bài toán. Vì M là trung điểm AN nên $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$. Như vậy, gọi V là phép vị tự tâm A tỉ số 2 thì V biến M thành N. Nếu V biến (O) thành (O'') thì (O'') phải đi qua N. Vậy N là giao điểm của hai đường tròn (O') và (O''). Từ đó suy ra cách dựng.



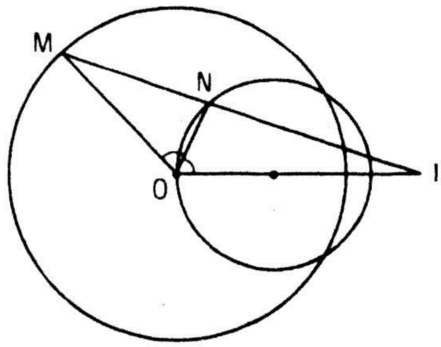
– Dựng O'' = V((O))

– Gọi N = (O') ∩ (O''), M = AN ∩ (O).

29. *Cho đường tròn (O ; R) và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.*

Giải

Đặt IO = d (d ≠ 0). Theo tính chất đường phân giác của tam giác MOI, ta có :



$$\frac{IN}{NM} = \frac{IO}{OM} = \frac{d}{R}.$$

Suy ra $\dfrac{IN}{IN + NM} = \dfrac{d}{d + R} \Leftrightarrow \dfrac{IN}{IM} = \dfrac{d}{d + R}.$

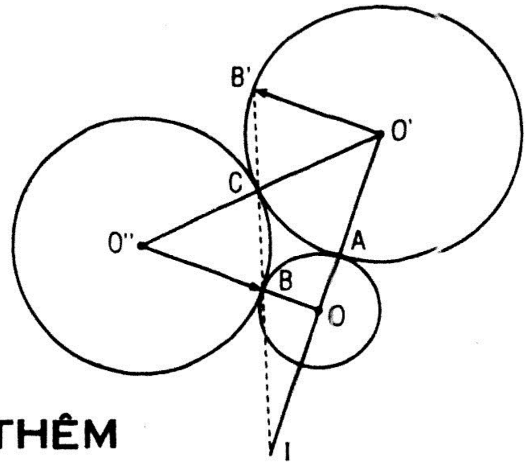
Vì hai vectơ $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng nên đẳng thức trên có nghĩa là : $\overrightarrow{IN} = \dfrac{d}{d + R}\overrightarrow{IM}$. Nếu gọi V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = \dfrac{d}{d + R}$ thì V biến điểm M thành điểm N. Khi M ở vị trí M_0 trên đường tròn (O ; R) sao cho $\widehat{IOM_0} = 0^o$ thì tia phân giác của góc $\widehat{IOM_0}$ không cắt IM. Điểm N không tồn tại. Vậy khi M chạy trên (O ; R) (M khác M_0) thì quỹ tích điểm N là ảnh của (O ; R) qua phép vị tự V bỏ đi ảnh của điểm M_0.

30. *Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn (O'') thay đổi, luôn luôn tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.*

Giải

Kéo dài BC cắt (O') tại B'. Vì C là tâm vị tự trong của (O') và (O'') nên

hai vectơ $\overrightarrow{O'B'}$ và $\overrightarrow{O''B}$ ngược hướng. Vì B là tâm vị tự trong của (O) và (O'') nên hai vectơ $\overrightarrow{O''B}$ và $\overrightarrow{OB}$ ngược hướng. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{O'B'}$ cùng hướng. Từ đó suy ra đường thẳng BB', cũng chính là đường thẳng BC, luôn luôn đi qua điểm cố định là tâm vị tự ngoài I của (O) và (O').



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau và một điểm M trên (O). Dựng một đường tròn đi qua M và tiếp xúc với hai đường tròn (O) và (O').

Hướng dẫn : Xét phép vị tự V tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ biến (O) thành (O') (I là giao điểm MN với OO').

§7. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa phép đồng dạng :

Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng với tỉ số k (k > 0) nếu hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có M'N' = kMN.

2. Định lí :

Mọi phép đồng dạng F tỉ số k đều hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

- ***Hệ quả (tính chất của phép đồng dạng)***

Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hành thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số của phép đồng dạng), biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR, biến góc thành góc bằng nó.

3. Hai hình đồng dạng :

- ***Định nghĩa***

Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

31. *Chứng tỏ rằng nếu phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.*

Giải

Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC thì phép đồng dạng F biến điểm D thành trung điểm D' của đoạn thẳng B'C', và vì thế trung tuyến AD của tam giác ABC biến thành trung tuyến A'D' của tam giác A'B'C'. Đối với hai trung tuyến còn lại cũng vậy. Vì trọng tâm tam giác là giao điểm của các đường trung tuyến nên trọng tâm tam giác ABC biến thành trọng tâm tam giác A'B'C'.

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC ($H \in BC$). Khi đó phép đồng dạng F biến đường thẳng AH thành đường thẳng A'H'. Vì $AH \perp BC$ nên $A'H' \perp B'C'$, nói cách khác A'H' là đường cao của tam giác A'B'C'. Đối với các đường cao khác cũng thế. Vì trực tâm tam giác là giao điểm của các đường cao nên trực tâm tam giác ABC biến thành trực tâm tam giác A'B'C'.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $OA = OB = OC$ nên nếu điểm O biến thành điểm O' thì $O'A' = O'B' = O'C' = kOA = kOB = kOC$, do đó O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

32. *Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.*

Giải

Giả sử cho hai n–giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_1...B_n$ có tâm lần lượt là O và O'. Đặt $k = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{O'B_1}{OA_1}$. Gọi V là phép vị tự tâm O, tỉ số k và $C_1C_2...C_n$ là ảnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ qua phép vị tự V. Hiển nhiên $C_1C_2...C_n$ cũng là đa giác đều và vì $\dfrac{C_1C_2}{A_1A_2} = k$ nên $C_1C_2 = B_1B_2$. Vậy, hai n–giác đều $C_1C_2...C_n$ và $B_1B_1...B_n$ có cạnh bằng nhau, tức là có phép dời hình D biến $C_1C_2...C_n$ thành $B_1B_1...B_n$ (xem BT22, chương I, SGK). Nếu gọi F là phép hợp thành của V và D thì F là phép đồng dạng biến $A_1A_2...A_n$ thành $B_1B_1...B_n$. Vậy hai đa giác đều đó đồng dạng với nhau.

33. *Dựng tam giác ABC nếu biết hai góc $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$ và một trong các yếu tố sau :*

a) Đường cao $AH = h$;

b) Đường trung tuyến $AM = m$;

c) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

Giải

Ta chú ý rằng có thể dựng rất nhiều tam giác ABC với hai góc B và C bằng hai góc β và γ đã cho, nhưng các tam giác đó đều đồng dạng với nhau. Vậy ta chỉ cần chọn trong các tam giác đó một tam giác thoả mãn điều kiện về yếu tố thứ ba đã cho. Ta suy ra cách dựng :

a) Dựng tam giác AB'C' có hai góc B' và C' lần lượt bằng β và γ. Cụ thể như sau : Dựng đoạn thẳng B'C' tuỳ ý. Trên một nửa mặt phẳng có bờ B'C' dựng tia B'x và C'y sao cho $\widehat{xB'C'} = \beta$ và $\widehat{yC'B'} = \gamma$. Hai tia đó cắt nhau tại A và ta có tam giác AB'C'.

Dựng đường cao AH' của tam giác AB'C'. Nếu AH' = h thì AB'C' là tam giác cần dựng.

Nếu AH' ≠ h thì trên tia AH', ta lấy điểm H sao cho AH = h rồi dựng đường thẳng a vuông góc với AH tại H, cắt AB' tại B và cắt AC' tại C. Tam giác cần dựng là ABC.

b) Tương tự như câu a).

c) Dựng tam giác AB'C' như câu a) rồi dựng tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB'C'. Trên tia AO' lấy điểm O sao cho AO = R rồi dựng đường tròn (O) đi qua A (tức là có bán kính bằng R). Hai tia AB' và AC' lần lượt cắt (O) tại các điểm B và C (khác A). ABC là tam giác cần dựng.

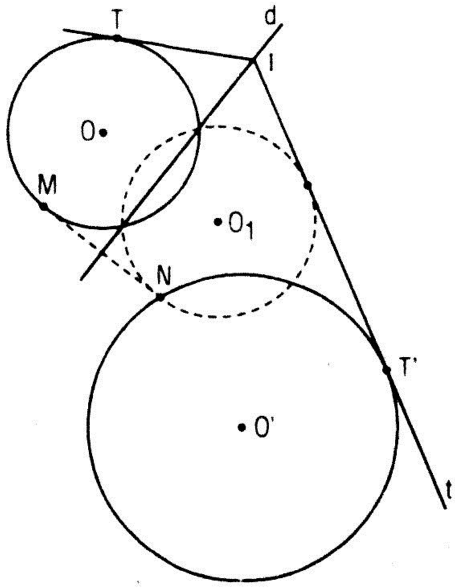
ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. *Cho hai đường tròn (O ; R), (O' ; R') và một đường thẳng d.*

a) Tìm hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho d là trung trực của đoạn thẳng MN.

b) Xác định điểm I trên d sao cho tiếp tuyến IT của (O ; R) và tiếp tuyến IT' của (O' ; R') hợp thành các góc mà d là một trong các đường phân giác của các góc đó.

Giải

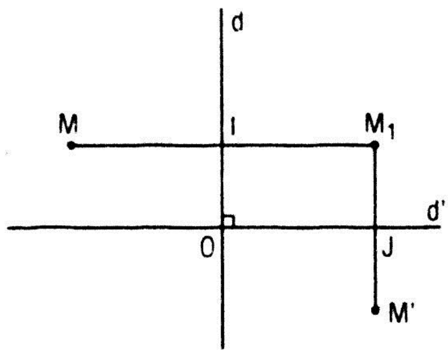


a) Gọi (O_1 ; R) là ảnh của đường tròn (O ; R) qua phép đối xứng trục $Đ_d$. Giao điểm (nếu có) của hai đường tròn (O_1 ; R) và (O' ; R') chính là điểm N cần tìm, điểm M là điểm đối xứng với N qua d.

b) Vẫn gọi (O_1 ; R) như trên và I là điểm cần tìm thì IT' là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1 ; R) và (O' ; R'). Suy ra cách dựng : Vẽ tiếp tuyến chung t (nếu có) của hai đường tròn (O_1 ; R) và (O' ; R'). Giao điểm (nếu có) của t và d chính là điểm I cần tìm. Khi đó tiếp tuyến IT' chính là t còn đường thẳng đối xứng với IT' qua d là tiếp tuyến IT của (O ; R).

2. *Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.*

Giải



Giả sử hình H có hai trục đối xứng d và d' vuông góc với nhau. Gọi O là giao điểm của hai trục đối xứng đó. Lấy M là điểm bất kì thuộc hình H, M_1 là điểm đối xứng với M qua d, M' là điểm đối xứng với M_1 qua d'. Vì d và d' đều là trục đối xứng của hình H nên M_1 và M' đều thuộc H.

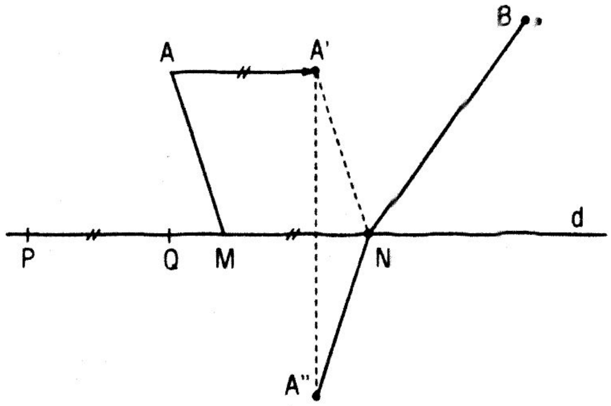
Gọi I là trung điểm của MM_1, J là trung điểm của M_1M' thì ta có :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{M'J} + \overrightarrow{JO} = \overrightarrow{M'O} \text{ hay } \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}.$$

Vậy phép đối xứng tâm O biến điểm M thuộc hình H thành điểm M' thuộc H, suy ra H có tâm đối xứng là O.

3. *Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P, Q và hai điểm A, B nằm về một phía đối với d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất.*

Giải



Giả sử hai điểm M, N nằm trên d sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$. Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$ thì điểm A' hoàn toàn xác định và AMNA' là hình bình hành nên AM = A'N.

Ta có AM + BN = A'N + BN

Gọi A'' là điểm đối xứng của A' qua d, khi đó A'N + BN = A''N + BN ≥ A''B

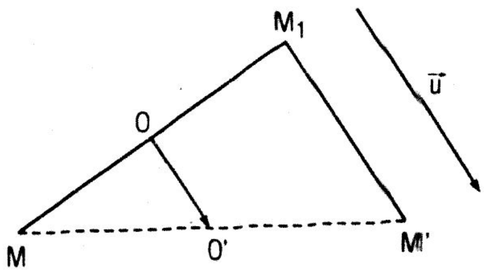
Từ đó suy ra AM + BN nhỏ nhất khi N là giao điểm của BA'' với d. Từ đó tìm được điểm M thoả $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$.

4. *Cho vectơ $\vec{u}$ và một điểm O. Với điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua O và M' là điểm sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M'.*

a) F là phép hợp thành của hai phép nào? F có phải là phép dời hình hay không?

b) Chứng tỏ rằng F là phép đối xứng tâm.

Giải



a) F là hợp thành của hai phép : phép đối xứng tâm $Đ_O$ với tâm O và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}$. Ta có F là phép dời hình vì $Đ_O$ và T là phép dời hình.

b) Giả sử $M_1 = Đ_O(M)$ và $M' = T(M_1)$. Nếu gọi O' là trung điểm của MM' thì :

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{\overrightarrow{M_1M'}}{2} = \frac{\vec{u}}{2}.$$

Vậy điểm O' cố định và F chính là phép đối xứng qua tâm O'.

5. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C.*

a) Chứng tỏ rằng phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là một phép đối xứng tâm.

b) Tìm quỹ tích điểm M_3.

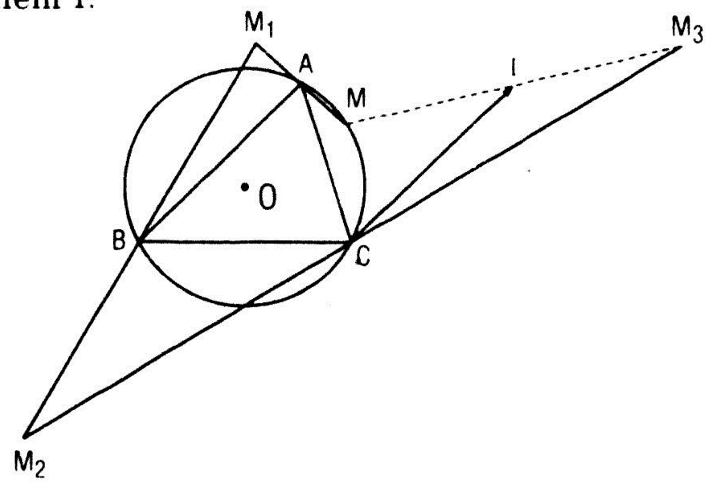
Giải

a) Gọi I là trung điểm của MM_3, ta chứng minh I là điểm cố định.

Thật vậy, ta có :

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{M_2C}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{BA}.$$

Như vậy điểm I cố định, do đó phép biến hình F biến M thành M_3 là phép đối xứng qua điểm I.

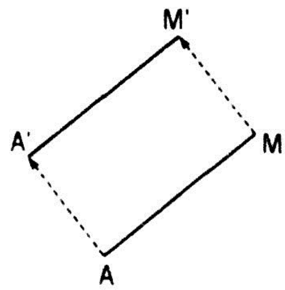


b) Quỹ tích điểm M_3 là đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm với tâm I.

6. *Gọi F là phép biến hình có tính chất sau đây : Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tịnh tiến hoặc phép vị tự.*

Giải

Ta lấy một điểm A cố định và đặt A' = F(A). Theo giả thiết, với điểm M bất kì và ảnh M' = F(M) của nó, ta có $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$.



* Nếu k = 1, thì $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$, do đó $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$, và F là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

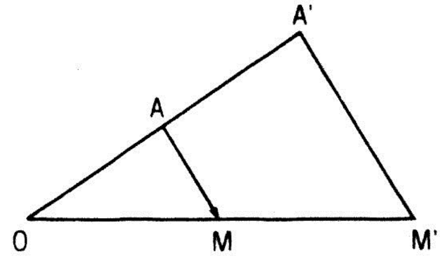
* Nếu k ≠ 1 thì có điểm O sao cho :

$$\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA} \text{ (với O thoả } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'})$$

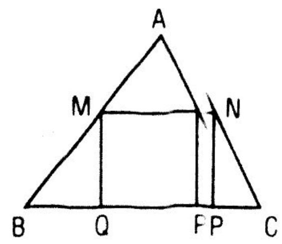
Khi đó ta có :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{OM}.$$

Vậy F là phép vị tự tâm O, tỉ số k.



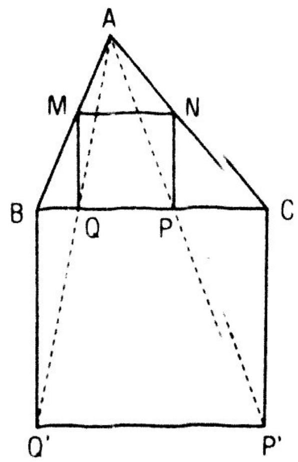
7. *a) Cho tam giác ABC và hình vuông MNPQ như hình bên. Gọi V là phép vị tự tâm A tỉ số $k = \dfrac{AB}{AM}$. Hãy dựng ảnh của hình vuông MNPQ qua phép vị tự V.*



b) Từ bài toán ở câu a) hãy suy ra cách giải bài toán sau : Cho tam giác nhọn ABC, hãy dựng hình vuông MNPQ sao cho hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC và hai đỉnh M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AN}$ nên phép vị tự V biến điểm M thành điểm B, biến điểm N thành điểm C. Vậy V biến hình vuông MNPQ thành hình vuông BCP'Q' như trên hình bên.



b) Dựng hình vuông BCP'Q' nằm ngoài tam giác ABC như hình. Lấy giao điểm P, Q của BC với các đoạn thẳng tương ứng AP' và AQ'. Từ P và Q, kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, lần lượt cắt AC và AB tại N và M. Khi đó MNPQ chính là hình vuông cần dựng.

8. *Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N.*

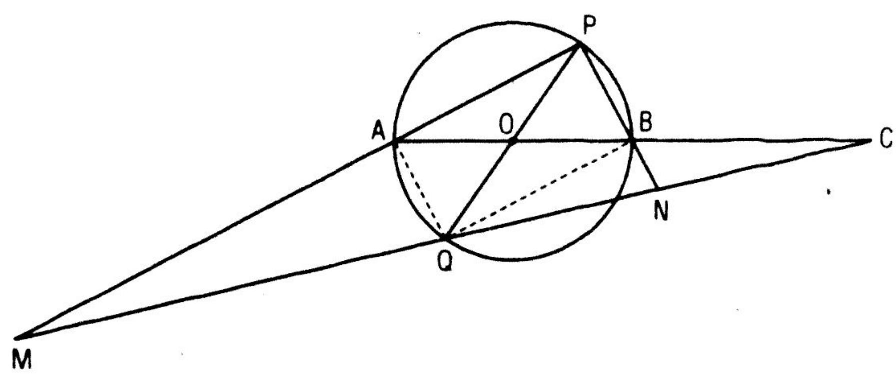
a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM, N là trung điểm của CQ.

b) Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

Giải

a) Ta có QB // AP (vì cùng vuông góc với PB) và B là trung điểm của AC nên Q là trung điểm của CM.

Ta có AQ // BN (vì cùng vuông góc với AP) và B là trung điểm của AC nên N là trung điểm của CQ.



b) Theo câu a) ta có $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ}$ nên phép vị tự V tâm C tỉ số 2 biến Q thành M. Vì Q chạy trên đường tròn (O) (trừ hai điểm A, B) nên quỹ tích M là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V (trừ ảnh của A, B).

Tương tự, ta có $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$ nên quỹ tích N là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự V' tâm C, tỉ số $\frac{1}{2}$ (trừ ảnh của A, B).

9. *Cho đường tròn (O ; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O; R) có độ dài không đổi BC = m. Tìm quỹ các điểm G sao cho* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

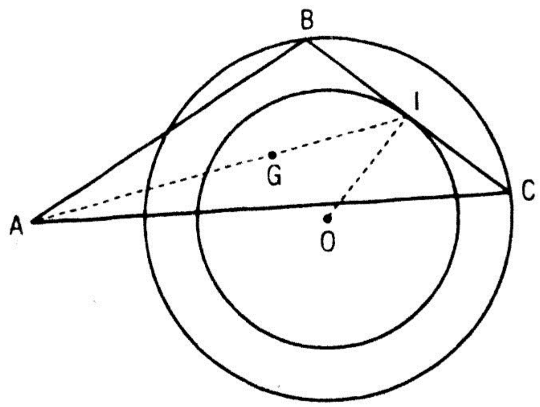
Giải

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, tức là phép vị tự V tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$ biến điểm I thành điểm G.

Trong tam giác vuông OIB ta có :

$$OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = R' \text{ (không đổi)}$$



nên quỹ tích I là đường tròn (O ; R') hoặc là điểm O (nếu m = 2R). Do đó quỹ tích G là ảnh của quỹ tích I qua phép vị tự V.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

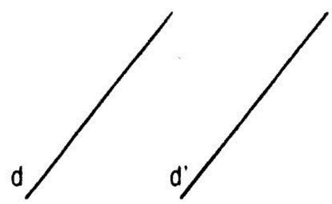
1. *Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?*

A) Không có phép tịnh tiến nào; *B) Có duy nhất một phép tịnh tiến;*
C) Chỉ có hai phép tịnh tiến; *D) Có rất nhiều phép tịnh tiến.*

Trả lời

Lấy A ∈ d, A' ∈ d' thì phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến d thành d'.

Chọn (D)

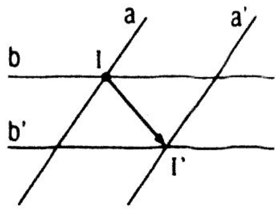


2. *Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó a // a', b // b', a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?*

A) Không có phép tịnh tiến nào; *B) Có duy nhất một phép tịnh tiến;*
C) Chỉ có hai phép tịnh tiến; *D) Có rất nhiều phép tịnh tiến.*

Trả lời

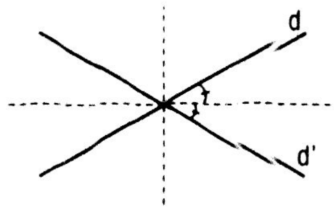
Gọi I là giao điểm của a và b
I' là giao điểm của a' và b'
Khi đó phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{II'}$
biến a, b lần lượt thành a', b'. Chọn (B)



3. *Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?*
A) Không có phép đối xứng trục nào;
B) Có duy nhất một phép đối xứng trục;
C) Chỉ có hai phép đối xứng trục;
D) Có rất nhiều phép đối xứng trục.

Trả lời

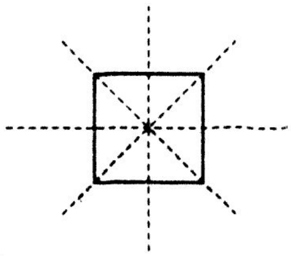
Hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d và d' là các trục đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chọn (C)



4. *Trong các hình sau đây, hình nào có bốn trục đối xứng?*
A) Hình bình hành; *B) Hình chữ nhật;*
C) Hình thoi; *D) Hình vuông.*

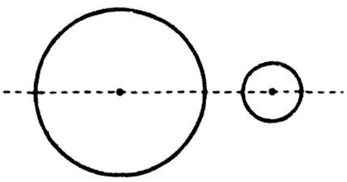
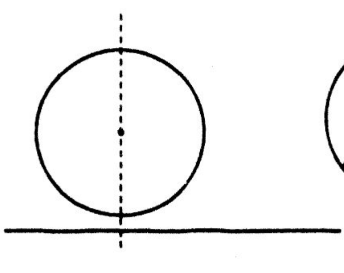
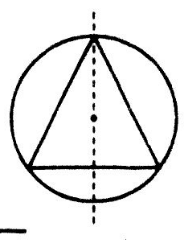
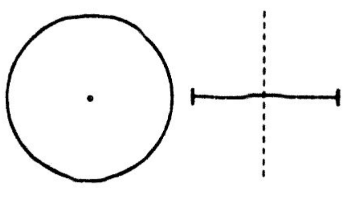
Trả lời

Hình vuông có 4 trục đối xứng.
Chọn (D).



5. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?*
A) Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau có trục đối xứng;
B) Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng tuỳ ý có trục đối xứng;
C) Hình gồm một đường tròn và một đường thẳng tuỳ ý có trục đối xứng;
D) Hình gồm một tam giác cân và đường tròn ngoại tiếp tam giác đó có trục đối xứng.

Trả lời

Chọn (B)

6. *Trong các hình sau đây, hình nào không có tâm đối xứng?*

A) Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp;

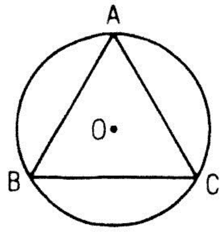
B) Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp;

C) Hình lục giác đều;

D) Hình gồm một hình vuông và đường tròn nội tiếp.

Trả lời

Tâm O của đường tròn không là tâm đối xứng của tam giác đều ABC.



Chọn (B)

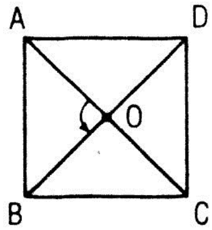
7. *Cho hình vuông ABCD tâm O. Xét phép quay Q có tâm quay O và góc quay φ. Với giá trị nào sau đây của φ, phép quay Q biến hình vuông ABCD thành chính nó?*

A) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; *B)* $\varphi = \frac{\pi}{4}$; *C)* $\varphi = \frac{\pi}{3}$; *D)* $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Trả lời

Xét phép quay Q tâm O, góc $\frac{\pi}{2}$ ta có :

$$Q : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ B & \to & C \\ C & \to & D \\ D & \to & A \end{array}$$



Suy ra Q : ABCD → ABCD. Chọn (D)

8. *Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự tỉ số k = 100 biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?*

A) Không có phép nào? ; *B) Có duy nhất một phép ;*

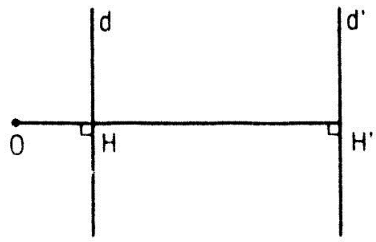
C) Chỉ có hai phép ; *D) Có rất nhiều phép.*

Trả lời

Trên đường thẳng HH' ⊥ d (H ∈ d, H' ∈ d').

Lấy O sao cho $\overrightarrow{OH'} = 100\,\overrightarrow{OH}$

Phép vị tự tâm O tỉ số k biến d thành d'.



Chọn (D)

9. *Cho đường tròn (O ; R). Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây :*

A) Có phép tịnh tiến biến (O ; R) thành chính nó ;

B) Có hai phép vị tự biến (O ; R) thành chính nó ;

C) Có phép đối xứng trục biến (O ; R) thành chính nó ;

D) Trong ba mệnh đề A, B, C, có ít nhất một mệnh đề sai.

Trả lời

A), B), C) Đều đúng. Chọn (D)

10. *Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?*

A) Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn nằm ngoài hai đường tròn đó;

B) Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn không nằm giữa hai tâm của hai đường tròn;

C) Tâm vị tự trong của hai đường tròn luôn thuộc đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn;

D) Tâm vị tự của hai đường tròn có thể là điểm chung của cả hai đường tròn.

Trả lời

Chọn (A)

11. *Phép biến hình nào sau đây không có tính chất : "Biến đường thẳng song song thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó"?*

A) Phép tịnh tiến ; *B) Phép đối xứng tâm ;*

C) Phép đối xứng trục ; *D) Phép vị tự.*

Trả lời

Chọn (C)

12. *Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?*

A) Phép dời hình là một phép đồng dạng ;

B) Phép vị tự là một phép đồng dạng ;

C) Phép đồng dạng là một phép dời hình ;

D) Có phép vị tự không phải là phép dời hình.

Trả lời

Chọn (C)

CHƯƠNG 2 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Các tính chất :

a. Tính chất 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

b. Tính chất 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

c. Tính chất 3

Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

d. Tính chất 4

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

e. Tính chất 5

Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

■ ***Định lí***

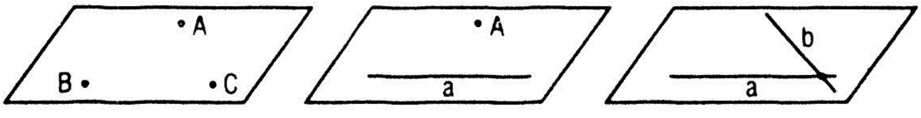
Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

2. Điều kiện xác định mặt phẳng :

i) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

ii) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

iii) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.



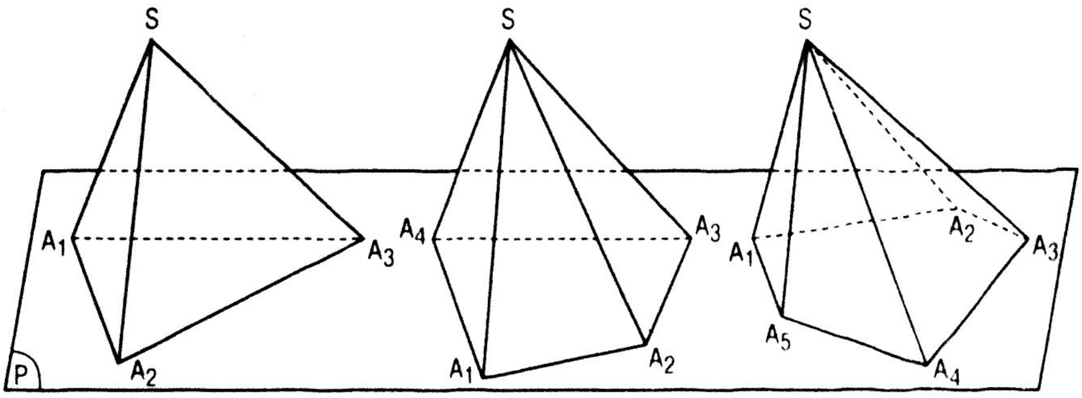
3. Hình chóp và hình tứ diện :

a) Hình chóp

■ ***Định nghĩa :***

Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2,..., A_n$ để được n tam giác : SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là hình chóp và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.



b) Hình tứ diện

■ ***Định nghĩa :***

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn là tứ diện) và được kí hiệu là ABCD. Thiết diện (hay mặt cắt) của hình $\mathcal{H}$ khi cắt bởi mp(P) là phần chung của mp(P) và hình $\mathcal{H}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

- Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.
- Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

Lưu ý : Để tìm điểm chung của hai mặt phẳng ta thường tìm 2 đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó. Giao điểm (nếu có) của 2 đường thẳng này chính là điểm chung của 2 mặt phẳng.

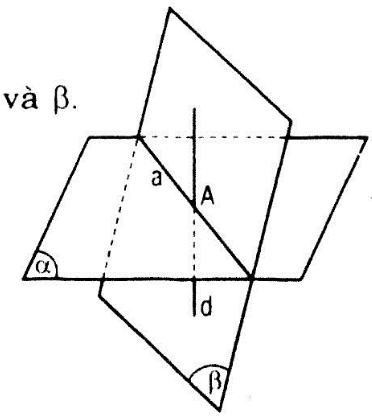
b) Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh ba điểm đó là các điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng sẽ nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó nên thẳng hàng.

c) Tìm giao tuyến của đường thẳng và mặt phẳng

Ta tìm giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng α.

- Bước 1 : Chọn mặt phẳng phụ β chứa d.
- Bước 2 : Tìm giao tuyến a của 2 mặt phẳng α và β.
- Bước 3 : Giao điểm A của d và a là giao điểm của d và α.



Chú ý : Thường chọn mặt phẳng phụ β sao cho giao tuyến α dễ xác định.

1. *Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?*

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước.

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

c) Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.

Trả lời

Mệnh đề a) Sai vì có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm thẳng hàng cho trước.

Mệnh đề b), c) Đúng.

2. *Em hãy giải thích vì sao các đồ vật có bốn chân như bàn, ghế, ... thường dễ bị cập kênh.*

Trả lời

Thường bốn chân của vật nằm trên một mặt phẳng, vật không cập kênh (gập ghềnh) nhưng mặt đất thường không phẳng, do đó bàn hoặc ghế thường hay cập kênh.

3. *Với một cái thước thẳng, làm thế nào để phát hiện một mặt bàn có phẳng hay không? Nói rõ căn cứ vào đâu mà ta làm như vậy.*

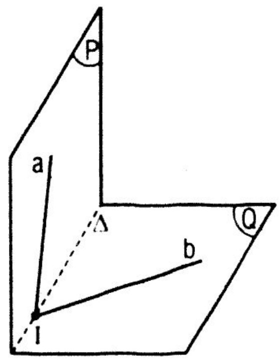
Trả lời

Đặt thước trên bàn, đẩy thước di động. Nếu mặt bàn thật phẳng thì cạnh thước lúc nào cũng sát với mặt bàn, nếu mặt bàn không thật phẳng thì cạnh thước có lúc không sát với mặt bàn và ta trông thấy có khe hở giữa cạnh thước và mặt bàn.

Căn cứ vào định lí : "Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó".

4. *Cho mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Chứng minh rằng nếu a và b cắt nhau thì giao điểm phải nằm trên Δ.*

Giải



Ta có $(P) \cap (Q) = \Delta$

Giả sử $I = a \cap b$.

Ta có $I \in a$ mà $a \subset (P)$ nên $I \in (P)$

$I \in b$ mà $b \subset (Q)$ nên $I \in (Q)$

Từ đó suy ra $I \in (P) \cap (Q) = \Delta$.

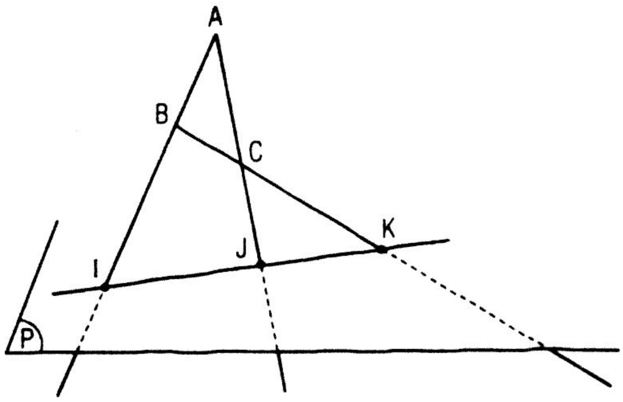
5. *Cho mặt phẳng (P) và ba điểm không thẳng hàng A, B, C cùng nằm ngoài (P). Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng AB, BC, CA đều cắt mp(P) thì các giao điểm đó thẳng hàng.*

Giải

Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của AB, AC, BC với mp(P). A, B, C không thẳng hàng nên có mp(ABC).

Rõ ràng I, J, K ∈ mp(ABC) và I, J, K ∈ mp(P) nên I, J, K nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (ABC).

Vậy I, J, K thẳng hàng.



6. *Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?*

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng cho trước.

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng chứa điểm đó.

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

Trả lời

a) b) mệnh đề sai vì có vô số mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng chứa điểm đó. Mệnh đề c) đúng.

7. *Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :*

a) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cho trước.

b) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng đó lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau.

Trả lời

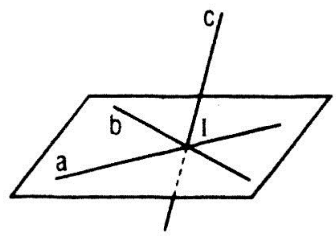
Mệnh đề a) sai vì có vô số mặt phẳng đi qua hai đường thẳng trùng nhau.

Mệnh đề c) sai vì không có mặt phẳng nào đi qua 2 đường thẳng chéo nhau.

Mệnh đề b) đúng.

8 *Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Một đường thẳng c cắt cả a và b. Có thể kết luận rằng ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trên một mặt phẳng hay không?*

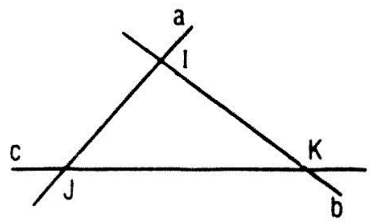
Trả lời



Không. Bởi vì nếu a và b cắt nhau tại I thì đường thẳng c qua I cắt cả a và b nhưng nó có thể không thuộc mp(a, b).

9. *Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng sao cho chúng đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng chúng đồng quy.*

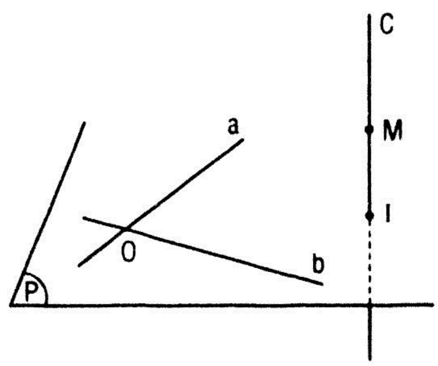
Giải



Gọi $I = a \cap b$; $J = a \cap c$, $K = b \cap c$. Nếu các điểm I, J, K phân biệt từng cặp thì a, b, c cùng thuộc mp(IJK), trái giả thiết. Vậy I, J, K trùng nhau do đó a, b, c đồng quy.

10 *Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O và đường thẳng c cắt mp(a, b) ở điểm I khác O. Gọi M là điểm di động trên c và khác I. Chứng minh rằng giao tuyến của các mặt phẳng (M, a), (M, b) nằm trên một mặt phẳng cố định.*

Giải



Ta có $M \in (M, a) \cap (M, b)$

Vì $O = a \cap b$ nên $O \in (M, a) \cap (M, b)$

$\Rightarrow (M, a) \cap (M, b) = MO$

Vì $M \in c$ nên $MO \subset mp(O, c)$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a), (M, b) nằm trên mặt phẳng (O, c) cố định.

11. *Cho hình bình hành ABCD nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm S nằm ngoài mp(P). Gọi M là điểm nằm giữa S và A; N là điểm nằm giữa S và B; Giao điểm của hai đường thẳng AC và BD là O.*

a) Tìm giao điểm của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng SO.

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

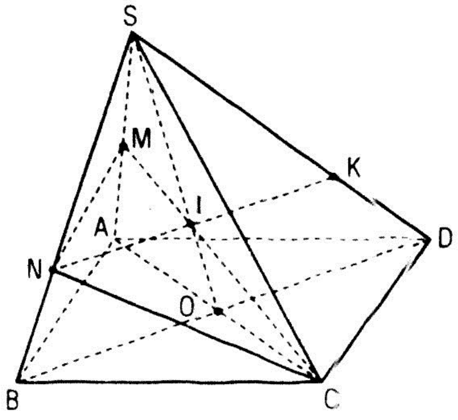
Giải

a) Tìm SO $\cap$ (CMN)

Trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của SO với CM :

$$I = SO \cap CM$$

Mà CM $\subset$ (CMN) nên I = SO $\cap$ (CMN)



b) Tìm (SAD) $\cap$ (CMN)

Trong mp(SBD) gọi K là giao điểm của NI và SD. K = NI $\cap$ SD

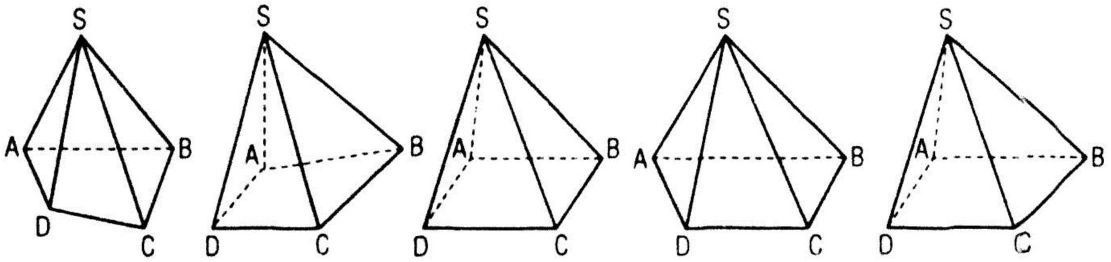
Ta có M, K $\in$ (CMN) và M, K $\in$ (SAD)

Do đó (SAD) $\cap$ (CMN) = MK.

12. *Vẽ một số hình biểu diễn của một hình chóp tứ giác trong các trường hợp đáy là tứ giác lồi, đáy là hình bình hành, đáy là hình thang.*

Giải

- Nếu đáy của hình chóp là tứ giác lồi tuỳ ý, ta có hình thường dùng là hình a) hoặc hình b).
- Nếu đáy của hình chóp tứ giác là hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi hay hình vuông, ta có hình biểu diễn thường dùng của hình chóp là hình c).
- Nếu đáy của hình chóp tứ giác là hình thang ABCD (AB // CD) thì ta có hình biểu diễn thường dùng là hình d) hoặc hình e).

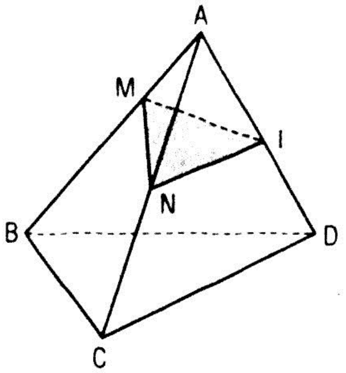


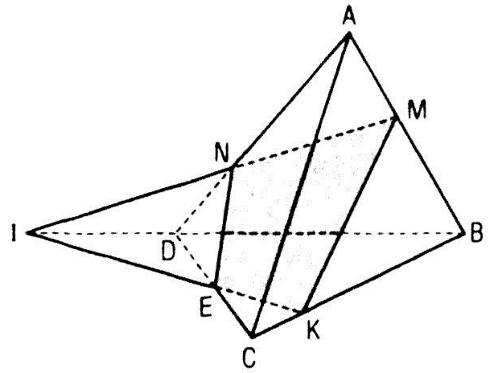
a) b) c) d) e)

13. *Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không?*

Giải

Thiết diện của một hình tứ diện là một tam giác khi mặt phẳng cắt ba mặt của tứ diện. Thiết diện là một tứ giác khi mặt phẳng cắt bốn mặt của hình tứ diện. Thiết diện của một hình tứ diện không thể là một ngũ giác vì ngũ giác có năm cạnh mà tứ diện chỉ có bốn mặt.





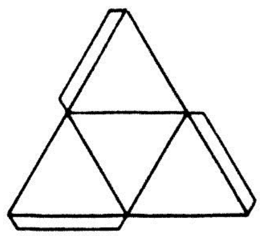
14. *Dùng bìa cứng cắt và dán lại để thành :*

a) Một tứ diện đều;

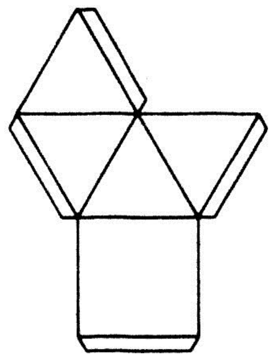
b) Một hình chóp tứ giác có đáy là hình vuông và các mặt bên là những tam giác đều.

Giải

Cắt theo mẫu sau :



a)



b)

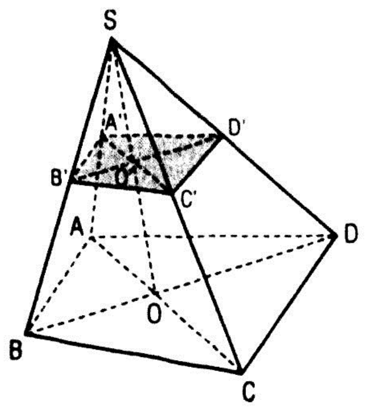
15. *Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với S, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(A'B'C')*

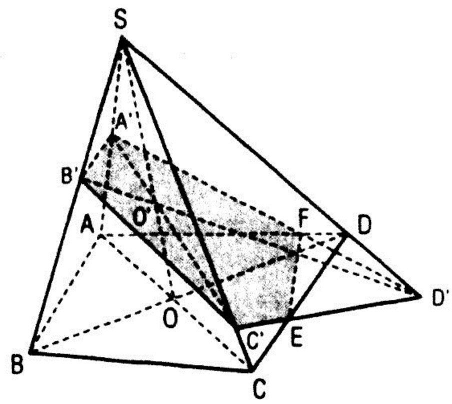
Giải

Gọi $O = AC \cap BD$; $O' = A'C' \cap SO$

$D' = B'O' \cap SD$

■ Nếu D' thuộc đoạn SD thì thiết diện là tứ giác A'B'C'D'





■ **Nếu D' nằm trên phần kéo dài của cạnh SD, ta gọi E là giao điểm của CD và C'D', F là giao điểm của AD và A'D'.**

Khi ấy thiết diện là ngũ giác A'B'C'EF.

16. *Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác SCD.*

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp(SAC).

c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(ABM).

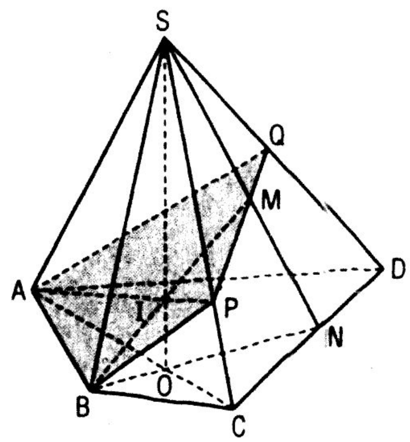
Giải

a) Tìm (SBM) ∩ (SAC)

Trong ΔSCD gọi N = SM ∩ CD.

Trong mp(ABCD) gọi O = BN ∩ AC.

Ta có : SO = (SBM) ∩ (SAC)



b) Tìm BM ∩ (SAC)

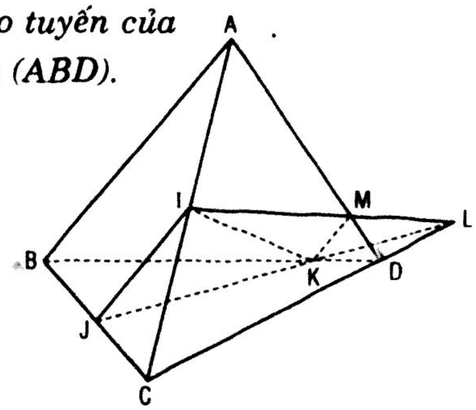
- Chọn mặt phẳng phụ chứa BM là (SBN)
- (SBN) ∩ (SAC) = SO.
- Gọi I = SO ∩ BM thì
  I = BM ∩ (SAC)

c) Trong mp(SAC) gọi P = AI ∩ SC

Trong mp(SCD) PM cắt SD tại Q. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(ABM) là tứ giác ABPQ

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là một điểm trên cạnh BD sao cho KD < KB. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với hai mặt phẳng (ACD) và (ABD).*



Hướng dẫn :

a) Gọi L là giao điểm của JK và CD.

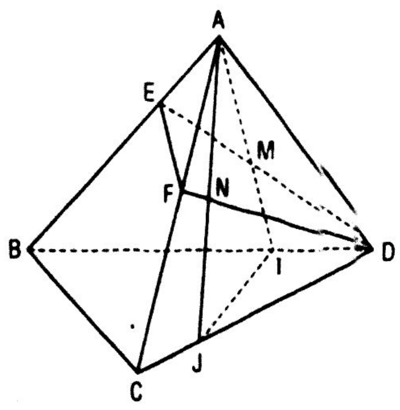
Ta có : (IJK) ∩ (ACD) = IL

b) Gọi M là giao điểm của AD và IL.

Ta có : (IJK) ∩ (ABD) = KM

2. *Cho tứ diện ABCD, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.*

a) (AMN) và (BCD) ; *b) (DMN) và (ABC).*



Hướng dẫn :

a) Giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Gọi I là giao điểm của AM và BD. J là giao điểm của AN và CD.

Ta có : (AMN) ∩ (BCD) = IJ

b) Giao tuyến của (DMN) và (ABC)

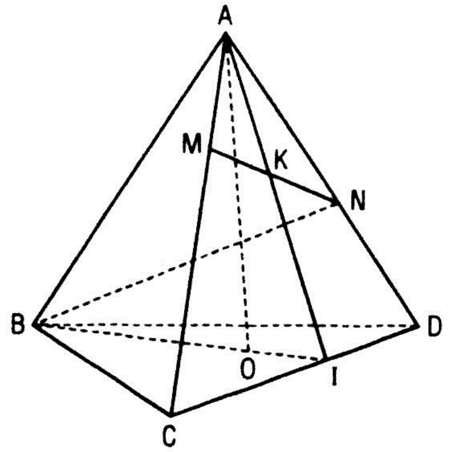
Gọi E là giao điểm của DM và AB. F là giao điểm của DN và AC.

Ta có : (DMN) $\cap$ (ABC) = EF

3 *Cho tứ diện ABCD, M và N là hai điểm lần lượt trên AC và AD. O là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao điểm của :*

a) MN và (ABO) ; *b) AO và (BMN).*

Hướng dẫn :



a) Tìm giao điểm MN và (ABO)

- Chọn mặt phẳng phụ chứa MN là (ACD)
- (ACD) $\cap$ (ABO) = AI với I là giao điểm của 2 đường thẳng BO và CD
- Gọi K là giao điểm của AI và MN thì K là giao điểm của MN và (ABO)

b) Tìm giao điểm AO và (BMN)

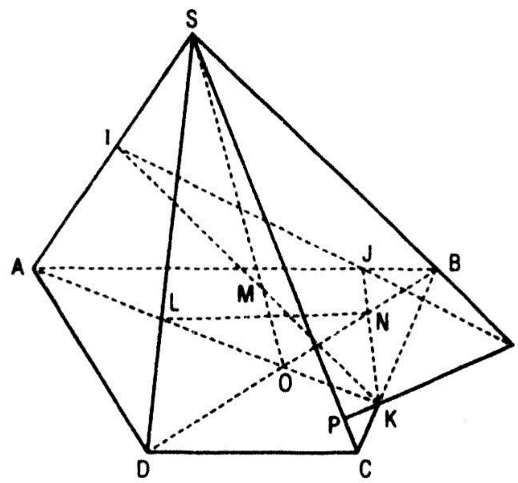
- Chọn mặt phẳng phụ chứa AO là (ABI)
- (ABI) $\cap$ (BMN) = BK
- Gọi L là giao điểm của BK và AO thì L là giao điểm của AO và (BMN)

4 *Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, đáy lớn là AB. Gọi I, J, K là 3 điểm trên SA, AB, BC theo thứ tự đó.*

a) Tìm giao điểm IK với (SBD)

b) Tìm các giao điểm của mặt phẳng (IJK) với SD và SC.

Hướng dẫn :



a) Tìm giao điểm IK và (SBD)

- Chọn mặt phẳng phụ chứa IK là (SKA)
- (SKA) $\cap$ (SBD) = SO với O là giao điểm của AK và BD
- Gọi M là giao điểm của SO và IK thì M là giao điểm của IK và (SBD)

b) Tìm giao điểm SD và (IJK)

- Chọn mặt phẳng phụ chứa SD là (SBD)
- (SBD) $\cap$ (IJK) = MN với N là giao điểm của JK và BD
- Gọi L là giao điểm của MN và SD thì L là giao điểm của SD và (IJK)

c) Tìm giao điểm SC và (IJK)

- Chọn mặt phẳng phụ chứa SC là (SBC)
- (SBC) $\cap$ (IJK) = KR với R là giao điểm của 2 đường thẳng IJ và SB
- Gọi P là giao điểm của KR và SC thì P là giao điểm của SC và (IJK)

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt :

■ ***Định nghĩa***

Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.

Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.

Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

2. Hai đường thẳng song song :

■ ***Tính chất 1***

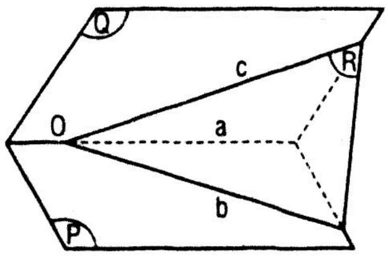
Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

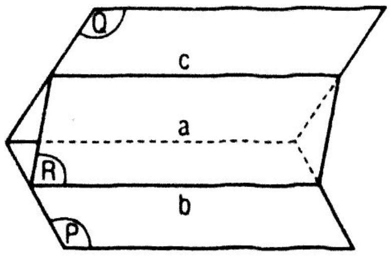
■ ***Tính chất 2***

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

■ ***Định lí (về giao tuyến của ba mặt phẳng)***

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.





$$\begin{cases} (P)\cap(Q)=a \\ (P)\cap(R)=b \\ (Q)\cap(R)=c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\cap b\cap c=\{O\} \\ a//b//c \end{array}\right.$$

■ ***Hệ quả***

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Chứng minh hai đường thẳng song song

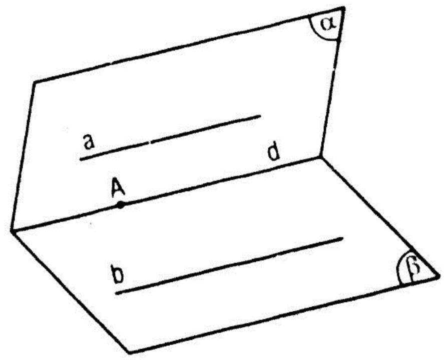
Sử dụng một trong các phương pháp sau :

a) Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (đường trung bình, định lí đảo của định lí Talet...)

b) Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.

c) Áp dụng định lí về giao tuyến

$$\begin{cases} (\alpha)\cap(\beta) = d \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow d // a // b \\ a // b \end{cases}$$



2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

- Tìm một điểm chung A của 2 mặt phẳng (α) và (β)
- (α) và (β) lần lượt chứa 2 đường thẳng song song a và b
- Giao tuyến là đường thẳng qua A và song song với a, b

17. *Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :*

a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

c) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

d) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

Trả lời

a) Mệnh đề đúng

b) Mệnh đề sai (xét trường hợp hai đường thẳng song song)

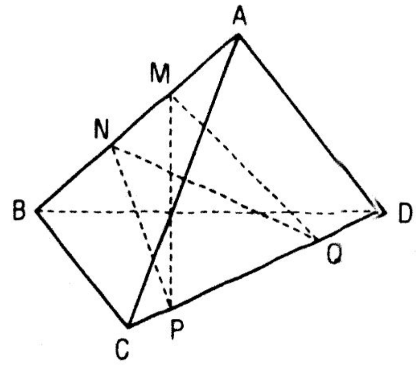
c) Mệnh đề sai (xét hai đường thẳng cắt nhau)

d) Mệnh đề đúng.

18. *Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P, Q là điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MQ, NP và vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ.*

Giải

Hai đường thẳng MQ và NP chéo nhau. Thật vậy, giả sử chúng không chéo nhau, tức chúng cùng thuộc một mp(α) nào đó. Vậy M, N, P, Q cùng thuộc mp(α) và do đó A, B, C, D cùng thuộc mp(α). Điều này mâu thuẫn với giả thiết ABCD là một tứ diện.



Chứng minh tương tự, hai đường thẳng MP và NQ cũng chéo nhau.

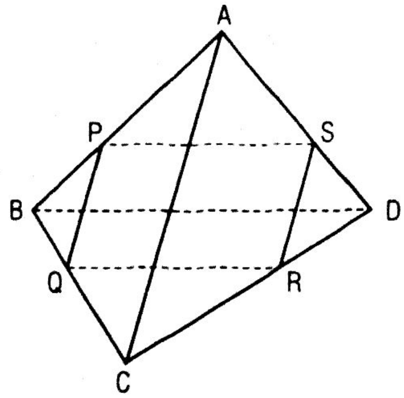
19. *Cho tứ diện ABCD. Bốn điểm P, Q, R, S lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng :*

a) Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy;

b) Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PS, RQ, BD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Giải

a) Nếu P, Q, R, S đồng phẳng thì chúng cùng thuộc mặt phẳng (PQRS)



Ta có (PQRS) $\cap$ (ABC) = PQ

(PQRS) $\cap$ (ACD) = RS

(ABC) $\cap$ (ACD) = AC

Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì PQ, SR, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Ngược lại, nếu ba đường thẳng PQ, AC, RS hoặc đôi một song song hoặc đồng quy thì hai đường thẳng PQ và RS hoặc song song hoặc cắt nhau. Vậy hai đường thẳng PQ và RS cùng thuộc một mặt phẳng, từ đó bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng.

b) Chứng minh tương tự a)

20. *Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mp(PQR) với cạnh AD nếu :*

a) PR // AC;

b) PR cắt AC.

Giải

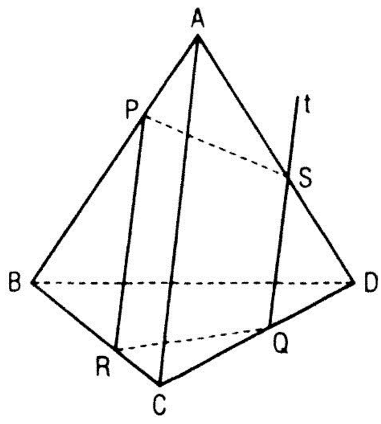
a) Trường hợp PR // AC

Hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) có điểm chung Q và lần lượt chứa hai đường thẳng song song PR và AC nên :

(PQR) $\cap$ (ACD) = Qt // AC

Gọi {S} = Qt $\cap$ AD thì

{S} = AD $\cap$ (PQR)



a)

b) Trường hợp PR cắt AC

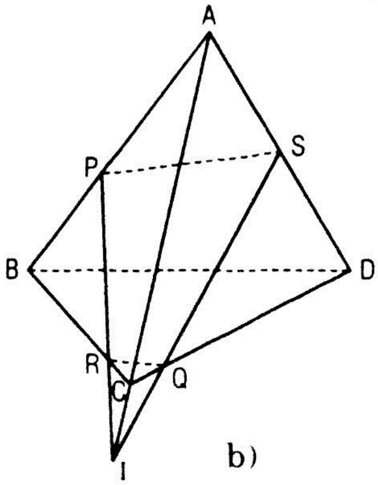
Giả sử {I} = PR $\cap$ AC

$\Rightarrow$ (PQR) $\cap$ (ACD) = QI

Trong mp(ACD) ta có

{S} = QI $\cap$ AD thì

{S} = AD $\cap$ (PQR)



b)

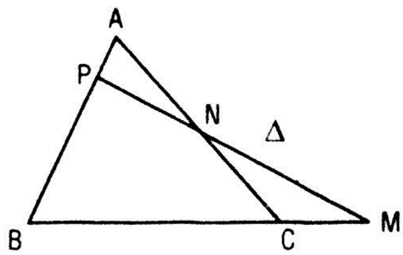
21. *Cho tứ diện ABCD. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; Điểm R nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Gọi S là giao điểm của mp(PQR) và cạnh AD. Chứngminh rằng AS = 2SD.*

Giải

Định lí Menelaus

Giả sử đường thẳng Δ cắt các cạnh (hoặc phần kéo dài) BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P thì :

$$\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1$$

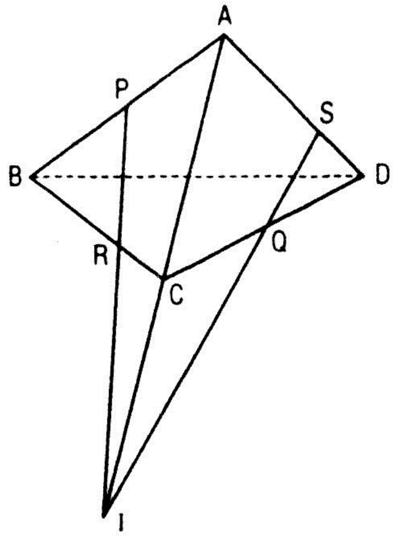


Áp dụng định lí để giải bài toán

Gọi {I} = PR $\cap$ AC

Trong mp(ACD) gọi {S} = QI $\cap$ AD thì

{S} = AD $\cap$ (PQR)



Áp dụng định lí Menelaus trong ΔABC với cát tuyến PRI ta có :

$$\frac{PA}{PB}.\frac{RB}{RC}.\frac{IC}{IA} = 1 \quad \Rightarrow 1.2.\frac{IC}{IA} = 1 \Rightarrow \frac{IC}{IA} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ C là trung điểm của AI

Áp dụng định lí Menelaus trong ΔACD với cát tuyến IQS ta có :

$$\frac{IC}{IA}.\frac{QD}{QC}.\frac{SA}{SD} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}.1.\frac{SA}{SD} = 1 \Rightarrow SA = 2SD \text{ (đpcm)}$$

22. *Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.*

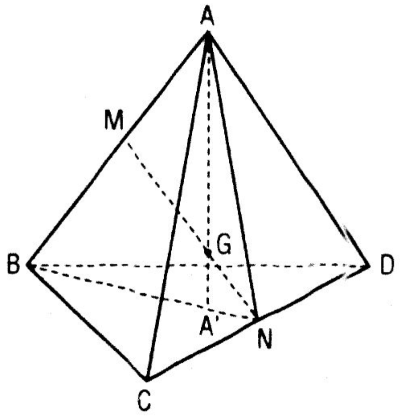
a) Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.

b) Gọi A' là trọng tâm của mặt BCD. Chứng minh rằng GA = 3GA'.

Giải

a) Trong mp(ABN) gọi A' là giao điểm của AG với trung tuyến BN (của ΔBCD. Ta chứng minh :

A'B = 2A'N



Áp dụng định lí Menelaus trong ΔBMN với cát tuyến AGA' ta có :

$$\frac{AM}{AB}.\frac{GN}{GM}.\frac{A'B}{A'N} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.1.\frac{A'B}{A'N} = 1 \Rightarrow A'B = 2A'N$$

Vậy A' là trọng tâm của ΔBCD

Tương tự BG, CG, DG lần lượt đi qua trọng tâm B', C', D' của tam giác ACD, ABD, ABC

b) Chứng minh GA = 3GA'

Áp dụng định lí Menelaus trong ΔABA' với cát tuyến MGN ta có :

$$\frac{MA}{MB}.\frac{GA'}{GA}.\frac{NB}{NA'} = 1 \Rightarrow 1.\frac{GA'}{GA}.3 = 1 \Rightarrow GA = 3GA' \text{ (đpcm)}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SA và SB.*

a) Chứng minh HK // CD

b) Gọi M là điểm trên cạnh SC không trùng S. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (HKM) và (SCD).

c) Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

2. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Gọi K là điểm trên cạnh SB sao cho* $SN = \frac{2}{3}SB$.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mp(IJK). Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng :

■ ***Định nghĩa***

Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

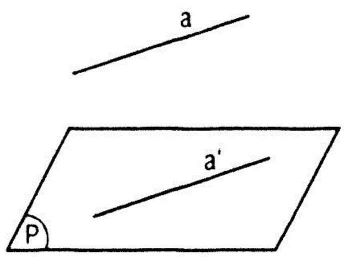
$$a // (\alpha) \Leftrightarrow a \cap (\alpha) = \varnothing$$

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng :

■ ***Định lí 1***

Nếu đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên mặt phẳng (P) thì a song song với (P).

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a' \subset (P) \\ a // a' \end{cases} \Rightarrow a // (P)$$

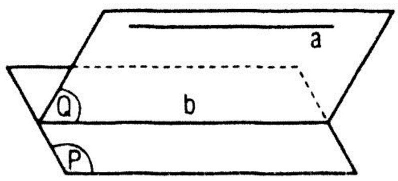


3. Tính chất :

■ ***Định lí 2***

Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.

$$\begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$$



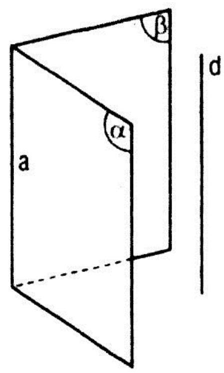
■ ***Hệ quả 1***

Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

■ ***Hệ quả 2***

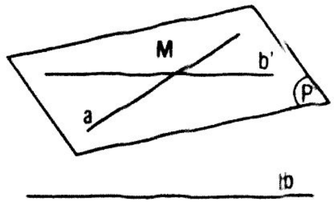
Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

$$\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ d // (\alpha) \\ d // (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow a // d$$



■ ***Định lí 3***

Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a, có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

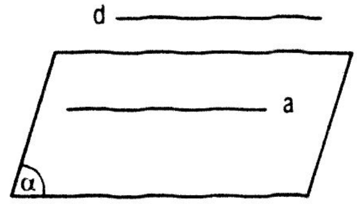


B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Muốn chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) (với $d \not\subset (\alpha)$) ta chứng minh d song song với đường thẳng a nào đó nằm trong (α).

$$\begin{cases} d \not\in (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \Rightarrow d // (\alpha) \\ d // a \end{cases}$$



2. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng

- Ta tìm các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp bằng cách tìm giao tuyến của (α) với các mặt phẳng chứa các mặt đó của hình chóp theo 2 cách :
  - Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng đó (cách 1).
  - Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng và hai đường thẳng song song nằm lần lượt trong hai mặt phẳng (cách 2).
- Thường sử dụng hệ quả sau :

  Nếu $d // (\alpha)$ thì mọi mặt phẳng $(\beta) \supset d$ cắt (α) theo giao tuyến song song với d.

23. *Cho hai đường thẳng a và b cùng song song với mp(P). Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?*

a) a và b song song với nhau ; *b) a và b chéo nhau ;*
c) a và b có thể cắt nhau ; *d) a và b trùng nhau ;*
e) a và b có một trong bốn vị trí tương đối ở các câu a), b), c) và d).

Trả lời

Mệnh đề c) và e) đúng.

24. *Cho mp(P) và hai đường thẳng song song a, b. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây?*

a) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b;
b) Nếu (P) song song với a thì (P) song song với b hoặc chứa b;
c) Nếu (P) song song với a thì (P) chứa b;
d) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b;
e) Nếu (P) cắt a thì (P) có thể song song với b;
f) Nếu (P) chứa a thì (P) có thể song song với b.

Trả lời

Mệnh đề a) sai vì có thể $b \subset (P)$

Mệnh đề b) đúng.

Mệnh đề c) sai vì có thể $b \,//\, (P)$

Mệnh đề d) đúng.

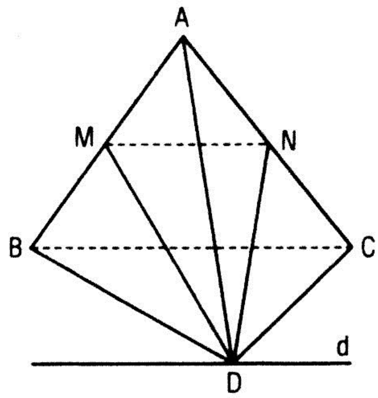
Mệnh đề e) sai vì b cắt (P).

Mệnh đề f) đúng.

26. *Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.*

a) Xét vị trí tương đối của đường thẳng MN và mp(BCD).

b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (DBC). Xét vị trí tương đối của d và mp(ABC).



Giải

a) MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN // BC.

Suy ra MN // mp(BCD) (vì $MN \not\subset (BCD)$)

b) Vì MN // (BCD) nên mp(DMN) đi qua MN cắt mp(BCD) theo giao tuyến d // MN.

Do đó d // mp(ABC).

26. *Cho tứ diện ABCD. Có thể hay không cắt tứ diện bằng một mặt phẳng để :*

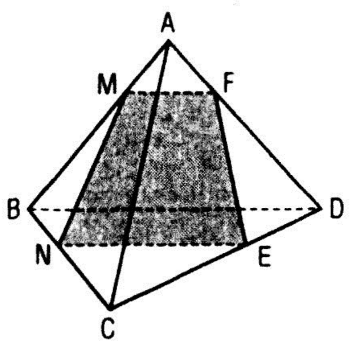
a) Thiết diện là hình thang?

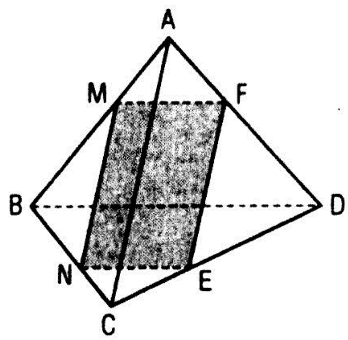
b) Thiết diện là hình bình hành?

c) Thiết diện là hình thoi?

Giải

a) Có thể cắt tứ diện bằng một mặt phẳng để thiết diện là hình thang, ví dụ như mặt phẳng đi qua M, N (M, N là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh AB, BC) và song song với BD.





b) Có thể cắt tứ diện bằng một mặt phẳng để thiết diện là hình bình hành, ví dụ như mặt phẳng đi qua điểm M nằm trên cạnh AB và song song với hai đường thẳng BD và AC.

c) Có thể. Giả sử mặt phẳng cắt là (P) qua điểm M thuộc đoạn AB, song ssong với BD và AC. Khi đó thiết diện là hình bình hành MNEF.

Ta có : $\frac{MF}{BD} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MF = \frac{BD.AM}{AB}$;

$\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow MN = \frac{AC.MB}{AB}$.

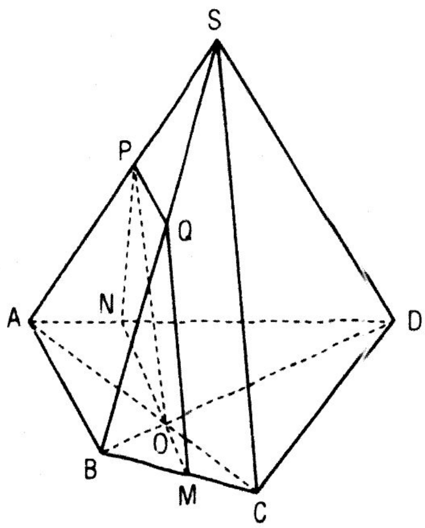
Tứ giác MNEF là hình thoi

$$\Leftrightarrow MF = MN \Leftrightarrow BD.AM = AC.MB \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}. (*)$$

Vậy với M xác định ở (*) thì mp(P) qua M và song song với AC, BD sẽ cắt tứ diện theo một thiết diện là hình thoi.

27. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua O, song song với AB và SC. Hỏi thiết diện đó là hình gì?*

Giải



Gọi (α) là mặt phẳng qua O song song với AB và SC.

AB // (α) nên (α) cắt mp(ABCD) theo giao tuyến qua O và song song với AB. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng qua O song song AB với BC và AD.

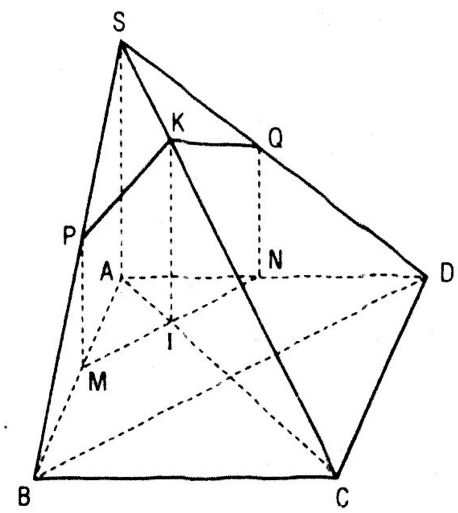
Trong mặt phẳng (SAC) kẻ OP // SC (P ∈ AS)

(α) cắt mp(SAB) theo giao tuyến PQ // AB (Q ∈ SB).

Thiết diện cần tìm là tứ giác MNPQ.

28. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA.*

Giải



Gọi (β) là mặt phẳng qua M và song song với BD, SA.

BD // (β) nên (β) cắt mp(ABCD) theo giao tuyến MN // BD (N ∈ AD).

SA // (β) nên (β) cắt mp(SAB) theo giao tuyến MP // SA (P ∈ SB).

(β) cắt mp(SAD) theo giao tuyến NQ // SA (Q $\in$ SD)

Gọi {I} = MN $\cap$ AC. (β) cắt mp(SAC) theo giao tuyến IK // SA (K $\in$ SC)

Thiết diện cần tìm là ngũ giác MNQKP.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC vuông tại A, $\hat{B} = 60^0$, AB = a. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy S ở ngoài (α) sao cho SB = a và SB ⊥ OA. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng (β) qua M và song song với SB và OA cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt x = BM (0 < x < a).*

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

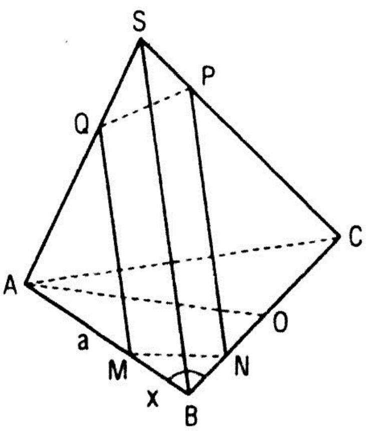
b) Tính theo a và x diện tích của hình thang này. Tính x để diện tích này lớn nhất.

Hướng dẫn :

a) MNPQ là hình thang vuông

Vì (α) // SB nên (α) cắt 2 mặt phẳng chứa SB là (SAB) và (SBC) lần lượt theo hai giao tuyến MQ và NP song song với BC nên MNPQ là hình thang.

Vì (α) // OA nên (α) cắt (ABC) theo giao tuyến MN // OA



Theo giả thiết SB ⊥ OA nên QM ⊥ MN.

Vậy MNPQ là hình thang vuông tại M.

b) $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MQ + NP).\ MN$

Ta có : $\dfrac{MQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = a - x$

Ta có : $\dfrac{NP}{SB} = \dfrac{CN}{CB} \Rightarrow NP = \dfrac{2a - x}{2}$

Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{x(4a - 3x)}{4}$. Ta có : $S_{MNPQ} = \dfrac{3x(4a - 3x)}{12}$

3x và 4a − 3x có tổng bằng 4a (hằng số) nên tích 3x(4a − 3x) lớn nhất khi 3x = 4a − 3x hay $x = \dfrac{2a}{3}$.

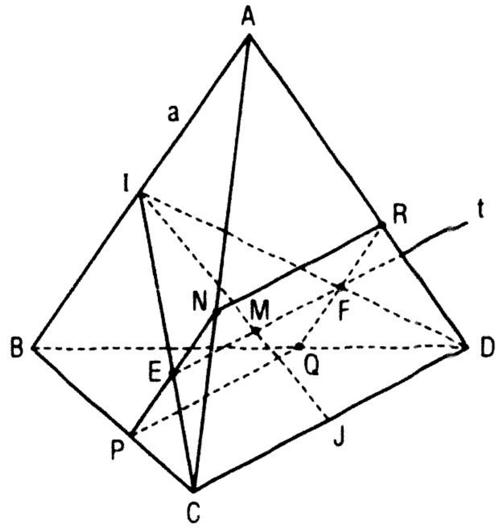
2. *Cho tứ diện ABCD có AB = a, CD = b. Đoạn IJ nối trung điểm I của AB và trung điểm J của CD. Giả sử AB ⊥ CD, (α) là mặt phẳng qua M trên đoạn IJ và song song với AB và CD.*

a) Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (ICD).

b) Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng (α). Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật.

c) Tính diện tích hình chữ nhật, biết $IM = \frac{1}{3}IJ$.

Hướng dẫn :



a) Xác định $(\alpha) \cap (ICD)$

$(\alpha) \cap (ICD)$ có điểm chung M và CD // (α) nên (α) cắt (ICD) theo giao tuyến Mt qua M và song song CD

b) Gọi E, F lần lượt giao điểm của Mt với CI và DI.

Qua E kẻ NP // AB, qua F kẻ QR // AB.

Thiết diện là hình chữ nhật là PQRN.
Vì có NP// QR, PQ // NR và $NP \perp PQ$ (do $AB \perp CD$).

c) $S_{PQRN} = \dfrac{2ab}{9}$

3. *Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho AJ = 2JD. M là một điểm di động trong ΔBCD, mặt phẳng (MIJ) luôn luôn song song với AB.*

a) Tìm tập hợp điểm M

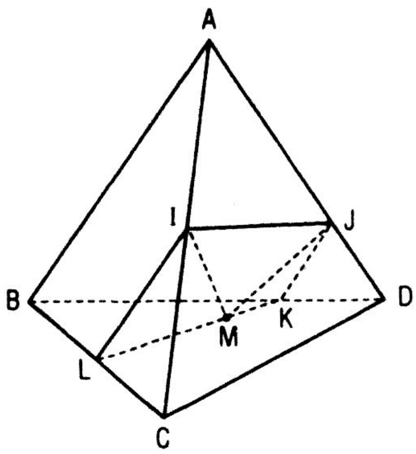
b) Tính diện tích thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng (MIJ).

Hướng dẫn :

a) Gọi L là trung điểm của BC, K là điểm trên BD sao cho BK = 2KD

Tập hợp điểm M là đoạn KL.

b) Thiết diện cần tìm là hình thang IJKL.



§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt :

■ ***Định nghĩa***

Hai mặt phẳng gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

$$(\alpha)\ //\ (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song :

■ ***Định lí 1***

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

$$\begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \text{ cắt } b \\ a\ //\ (Q),\ b\ //\ (Q) \end{cases} \Rightarrow (P)\ //\ (Q)$$

3. Tính chất :

■ ***Tính chất 1***

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

• ***Hệ quả 1***

Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q).

• ***Hệ quả 2***

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

■ ***Tính chất 2***

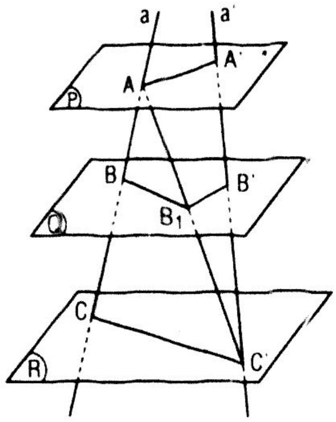
Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

4. Định lí Ta-lét (Thalès) trong không gian :

■ ***Định lí 2 (Định lí Ta-lét)***

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tỉ lệ.

Tức là : Nếu hai mặt phẳng đôi một song song (P), (Q), (R) cắt hai đường thẳng a và a' lần lượt tại A, B, C và A', B', C' thì :



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

■ ***Định lí 3 (Định lí Ta-lét đảo)***

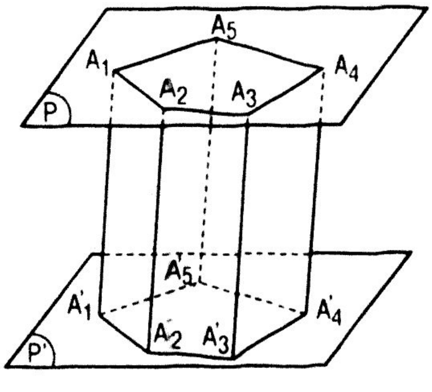
Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và a' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

5. Hình lăng trụ và hình hộp :

Hình hợp bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là hình lăng trụ hoặc lăng trụ, và kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.

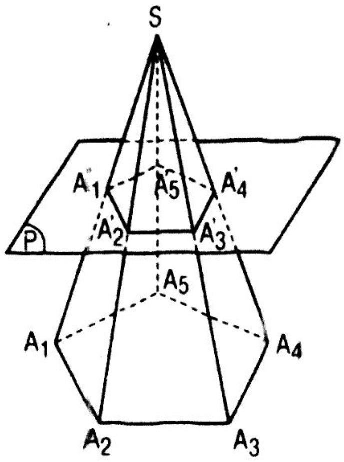


Nếu đáy của hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác thì lăng trụ tương ứng được gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác.

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

6. Hình chóp cụt :

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$; một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$ ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là một hình chóp cụt, kí hiệu là $A'_1A'_2...A'_n.\ A_1A_2...A_n$.



Đáy của của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.

■ ***Tính chất***

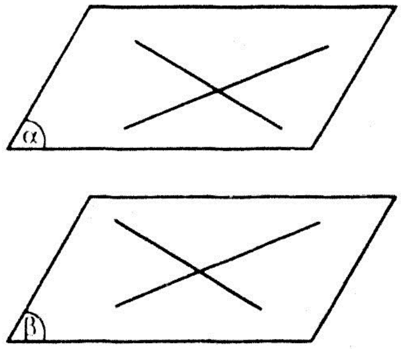
a) Hai đáy là hai đa giác có cạnh tương ứng song song và tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

b) Các mặt bên là những hình thang.

c) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

■ **Chứng minh hai mặt phẳng song song**



Ta chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia.

Từ đó ta có phương pháp thứ hai để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng là :

$$\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ a \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow a//(\alpha)$$

29. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

a) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

c) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên một mặt phẳng đều song song với mặt phẳng còn lại.

d) Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.

e) Nếu hai mặt phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

f) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

Trả lời

a) Sai vì hai mặt phẳng có thể cắt nhau theo giao tuyến song song với đường thẳng đã cho.

b) Đúng c) Đúng d) Sai

e) Sai vì có thể hai mặt phẳng cắt nhau.

f) Đúng.

30. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?*

a) Hình hộp là một hình lăng trụ.

b) Hình lăng trụ có tất cả các cạnh song song.

c) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.

d) Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành.

e) Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau.

Trả lời

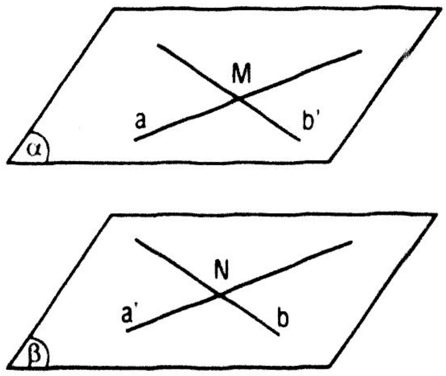
a) Đúng

b) Sai vì cạnh đáy không song song với cạnh bên

c) Sai d) Đúng e) Đúng

31. *Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có đúng hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.*

Giải



Gọi hai đường thẳng chéo nhau là a và b.

- Trên đường thẳng a ta lấy điểm M, qua M kẻ đường thẳng b' // b.
- Trên đường thẳng b ta lấy điểm N, qua N ta kẻ đường thẳng a' // a.
- Gọi $(\alpha) = mp(a, b')$, $(\beta) = mp(b, a')$ thì $(\alpha) // (\beta)$

* Ta chứng tỏ cặp mặt phẳng (α), (β) là duy nhất. Thật vậy giả sử tồn tại cặp (α'), (β') sao cho (α') chứa a, (β') chứa b và $(\alpha') // (\beta')$. Ta chứng minh $(\alpha') \equiv (\alpha)$ và $(\beta') \equiv (\beta)$.

– Do (α') và (α) cùng chứa a, nên nếu (α') và (α) không trùng nhau thì $(\alpha') \cap (\alpha) = a$ (1)

– Do $(\alpha') // (\beta') \Rightarrow b // (\alpha')$ (2)

– Do $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow b // (\alpha)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra a // b, mâu thuẫn giả thiết.

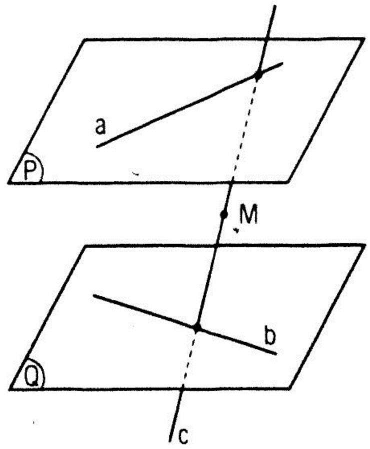
Vậy $(\alpha) \equiv (\alpha')$, tương tự $(\beta) \equiv (\beta')$

Do đó cặp mặt phẳng (α), (β) duy nhất.

32. *Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Chứng minh rằng nếu điểm M không nằm trên (P) và không nằm trên (Q) thì duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả a và b.*

Giải

Giả sử c = mp(M, a) $\cap$ mp(M, b). Ta cần chứng minh c cắt cả a và b.



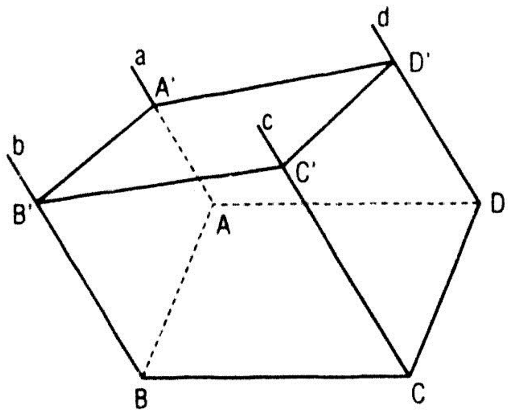
Vì c và a cùng nằm trên một mặt phẳng và không thể trùng nhau (do c qua M và a không đi qua M) nên hoặc c // a hoặc c cắt a. Cũng vậy, hoặc c // b hoặc c cắt b. Không thể xảy ra đồng thời c // a, c // b vì a và b chéo nhau. Vậy nếu c song song với a thì c phải cắt b, tức là c qua một điểm của mp(Q) và song song với a, suy ra c phải thuộc mp(Q), và do đó M thuộc (Q) (trái giả thiết). Tương tự, không thể có c song song với b. Tóm lại c phải cắt a và b.

Nếu còn có đường thẳng c' khác c đi qua M, cắt cả a và b thì a và b đồng phẳng. Vô lí.

33. *Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Một mặt phẳng cắt a, b, c, d lần lượt tại bốn điểm A', B', C', D'. Chứng minh rằng A'B'C'D' là hình bình hành.*

Giải

Ta có : $\begin{cases} a // b \\ AD // BC \\ a \cap AD \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow (a, d) // (b, c)$



Tương tự (a, b) // (c, d)

Vì hai mặt phẳng (a, b) và (c, d) song song nhau nên mp(A'B'C') cắt hai mặt phẳng này lần lượt theo hai giao tuyến A'B' và C'D' song song nhau.

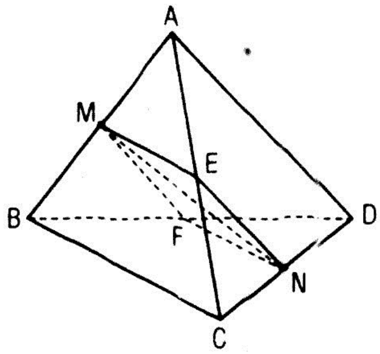
Tương tự A'D' // B'C'

Vậy A'B'C'D' là hình bình hành.

34. *Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của AB. Hỏi mặt phẳng (P) qua M, song song với cả AD và BC có đi qua trung điểm N của CD không ? Tại sao ?*

Giải

Giả sử (P) cắt BD, AC và CD lần lượt tại F, E, N



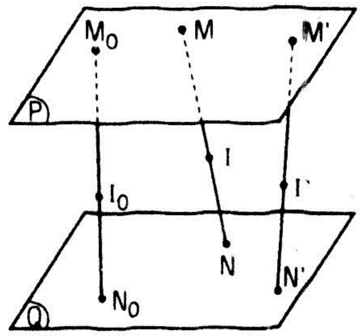
Vì AD // (P) nên (P) cắt mp(ABD) theo giao tuyến MF // AD.

Vì M là trung điểm của AB nên F là trung điểm của BD. Vì BC // (P) nên (P) cắt mp(BCD) theo giao tuyến FN // BC. Vì F là trung điểm của BD nên N là trung điểm của CD.

35. *Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho* $\frac{IM}{IN} = k, k \neq 0$ *cho trước.*

Giải

Thuận. Giả sử $M \in (P)$, $N \in (Q)$ và điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k$. Trên hai mặt phẳng (P) và (Q), ta lần lượt lấy hai điểm cố định M_0 và N_0 rồi lấy một điểm I_0 thuộc đoạn thẳng M_0N_0 sao cho $\frac{M_0I_0}{N_0I_0} = k$. Khi ấy điểm I_0 cố định.



Ta có : $\frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} (= k) \Rightarrow \frac{IM}{I_0M_0} = \frac{IN}{I_0N_0} = \frac{IM + IN}{I_0M_0 + I_0N_0} = \frac{MN}{M_0N_0}$.

Áp dụng định lí Ta–lét đảo, ta suy ra đường thẳng I_0I thuộc một mặt phẳng (R) song song với (P) và (Q). Mặt phẳng (R) cố định vì nó qua điểm cố định I_0 và song song với mặt phẳng cố định (P). Vậy điểm I thuộc mặt phẳng (R) cố định.

Đảo. Ngược lại, lấy một điểm I' bất kì trên mặt phẳng (R). Qua I' ta kẻ một đường thẳng cắt hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt tại M' và N'. Xét hai cát tuyến M_0N_0, M'N' và ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R). Theo định lí Ta–lét ta có :

$$\frac{I'M'}{I_0M_0} = \frac{I'N'}{I_0N_0} = \frac{M'N'}{M_0N_0}.$$

Từ đó ta suy ra I thuộc đoạn thẳng M'N' và $\frac{I'M'}{I'N'} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$.

Kết luận. Tập hợp điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k$ là mặt phẳng (R) nói trên.

36. *Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.*

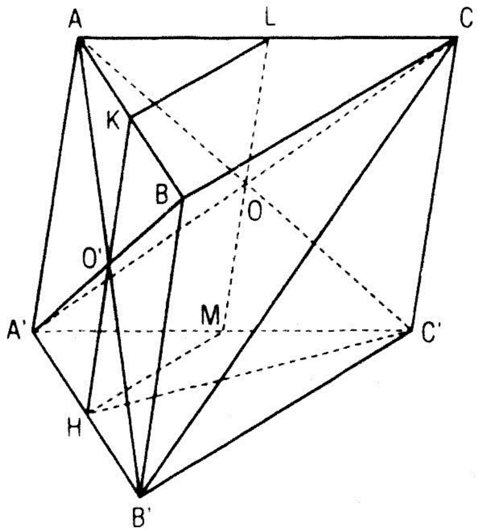
a) Chứng minh rằng đường thẳng CB' song song với mp(AHC').

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC). Chứng minh rằng d song song với mp(BB'C'C).

c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mp(H, d).

Giải

a) Chứng minh CB' // (AHC')



Ta tìm trong (AHC') một đường thẳng song song với CB', muốn vậy ta tìm giao tuyến của một mặt phẳng chứa CB' với (AHC'), đó là (A'CB'). Gọi O là giao điểm AC và A'C. AA'C'C là hình bình hành nên O là trung điểm của A'C.

Do đó HO là đường trung bình của ΔA'B'C

⇒ HO // BC ⇒ BC // (AHC').

(vì HO ⊂ (AHC'))

b) Tìm giao tuyến d của (AB'C') và (A'BC).

Gọi O' là giao điểm của AB' và A'B thì O, O' là 2 điểm chung của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC) nên : (AB'C') ∩ (A'BC) = OO'

Vậy d = OO'. Ta có O' là trung điểm của AB' (vì AA'B'B là hình bình hành).

⇒ OO' là đường trung bình của ΔAB'C'

⇒ OO' // B'C' // BC ⇒ OO' // (BB'C'C) ⇒ d // (BB'C'C)

c) Gọi {K} = HO' ∩ AB thì HK // AA'

Qua O kẻ ML // AA' (M ∈ A'C', L ∈ AC). Thiết diện cần tìm là hình bình hành HKLM.

37. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.*

a) Chứng minh rằng mp(BDA') // mp(B'D'C).

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1, G_2 của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c) Chứng minh rằng G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Chứng minh các trung điểm của sáu cạnh BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B cùng nằm trên một mặt phẳng.

Giải

a) Chứng minh (BDA') // (B'D'C)

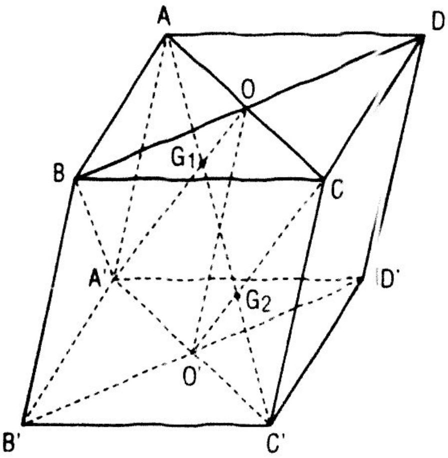
Ta có tứ giác BB'D'D và A'B'CD là các hình bình hành nên :

BD // B'D' và DA' // B'C ⇒ hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) có các cặp đường thẳng cắt nhau và song song nhau từng đôi một nên chúng song song.

Vậy (BDA') // (B'D'C)

b) Chứng minh $G_1, G_2 \in AC'$

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành ABCD và A'B'C'D'.



Trong mặt phẳng (AA'C'C) gọi G_1, G_2 lần lượt là giao điểm của AC' với A'O và O'C. Ta chứng minh G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của ΔA'BD và ΔCB'D'

Thật vậy, ta có $\Delta G_1OA \backsim \Delta G_1A'C'$ (vì AC // A'C')

$$\Rightarrow \frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A'G_1}{A'O} = \frac{2}{3}$$

⇒ G_1 là trọng tâm ΔA'BD

Tương tự G_2 là trọng tâm của ΔCB'D'. Vậy AC' đi qua G_1, G_2

c) Chứng minh $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$

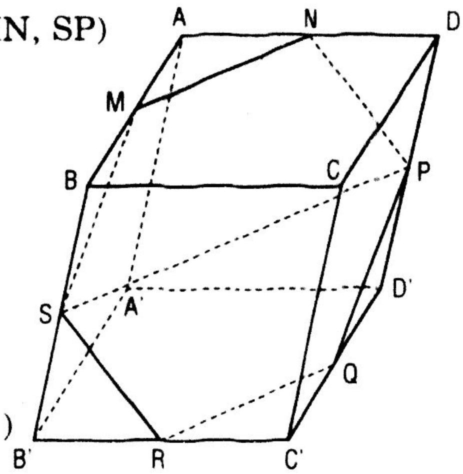
Theo câu trên ta có :

$$\frac{AG_1}{G_1C'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2} \text{ (vì } \Delta G_1OA \backsim \Delta G_1A'C') \Rightarrow AG_1 = \frac{1}{3}AC' \text{ (1)}$$

Tương tự : $\frac{C'G_2}{G_2A} = \frac{C'O'}{CA} = \frac{1}{2}$ (vì $\Delta G_2C'O' \backsim \Delta G_2AC$) $\Rightarrow C'G_2 = \frac{1}{3}AC'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$

d) Gọi M, N, P, Q, S, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, DD', C'D', C'B', B'B



Ta có $\begin{cases} MN // BD \\ SP // BD \end{cases} \Rightarrow MN // SP$. Gọi $(\alpha) = (MN, SP)$

Ta có $\begin{cases} PQ // DC' \\ MS // AB' \end{cases} \Rightarrow PQ // MS$ (vì DC' // AB')

$\Rightarrow PQ \subset (\alpha)$ do đó $Q \in (\alpha)$

Tương tự QR // MN ⇒ $QR \subset (\alpha)$ do đó $R \in (\alpha)$

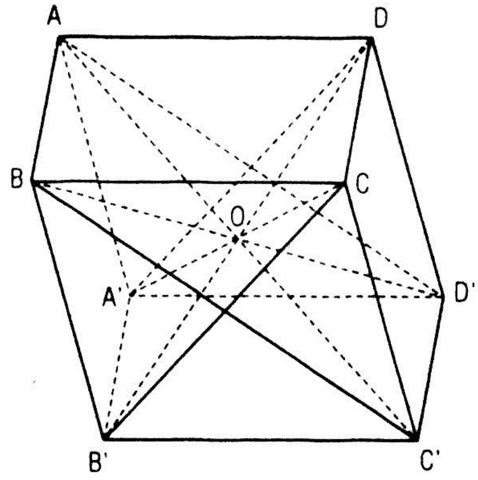
Vậy M, N, P, Q, R, $S \in (\alpha)$

Mặt khác vì $\begin{cases} MS // AB' \\ NP // AD' \end{cases}$ nên (MNPQRS) // (AB'D')

38. *Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.*

Giải

Áp dụng tính chất "Trong một hình bình hành, tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh".



Đặt AB = a, BC = b, AA' = c (đó là 3 kích thước của hình hộp).

Trong hình bình hành ABC'D' ta có :

$AC'^2 + BD'^2 = 2(a^2 + BC'^2)$ (1)

Trong hình bình hành A'B'CD ta có :

$A'C^2 + B'D^2 = 2(a^2 + B'C^2)$ (2)

Cộng (1) và (2) ta được :

$AC'^2 + BD'^2 + A'C^2 + B'D^2 = 2(2a^2 + BC'^2 + B'C^2)$ (3)

Mặt khác trong hình bình hành BB'C'C ta có :

$BC'^2 + B'C^2 = 2(b^2 + c^2)$ (4)

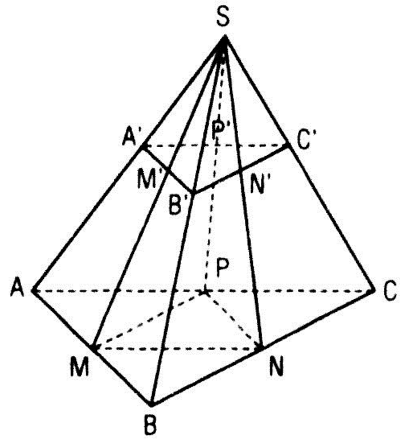
Thay (4) vào (3) ta được :

$AC'^2 + BD'^2 + A'C^2 + B'D^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$ (đpcm)

39. *Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C' có đáy lớn ABC và các cạnh bên AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', B'C', C'A'. Chứng minh MNP.M'N'P' là hình chóp cụt.*

Giải

Gọi S là giao điểm các cạnh bên AA', BB', CC' của hình chóp cụt.



Do A'B' // AB và M', M lần lượt là trung điểm của A'B', AB nên MM' đi qua S. Tương tự NN', PP' cùng đi qua S.

Vậy MM', NN', PP' đồng quy tại S.

Ta có (M'N'P') // (MNP) nên MNP.M'N'P' là hình chóp cụt.

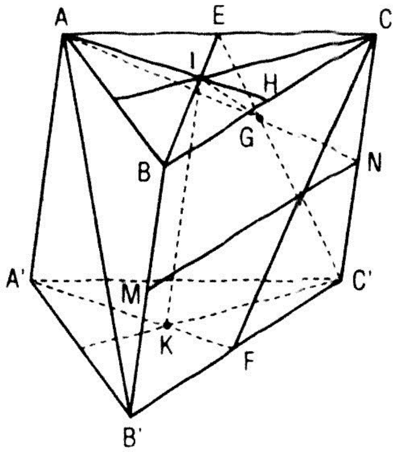
C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'.*

a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, A'B'C', ACC'. Chứng minh rằng (IGK) // (BB'C'C) và (A'KG) // (AIB')

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng qua trọng tâm tam giác ABC cắt AB' và MN.

Hướng dẫn :



a) Tứ giác AA'KI là hình bình hành

$\Rightarrow IK \parallel AA' \Rightarrow IK \parallel BB'$.

Gọi E là trung điểm của AC. Xét $\Delta EBC'$ có :

$$\frac{IE}{EB} = \frac{GE}{EC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG \parallel BC'$$

Từ : $\begin{cases} IK // BB' \\ IG // BC' \end{cases} \Rightarrow (IGK) // (BB'C'C)$

b) Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (IAB') và (IMN).

Gọi H là giao điểm của BC và AI, B'H cắt MN tại O thì IO là đường thẳng cần dựng.

2. *Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC'. P là điểm đối xứng của C qua A.*

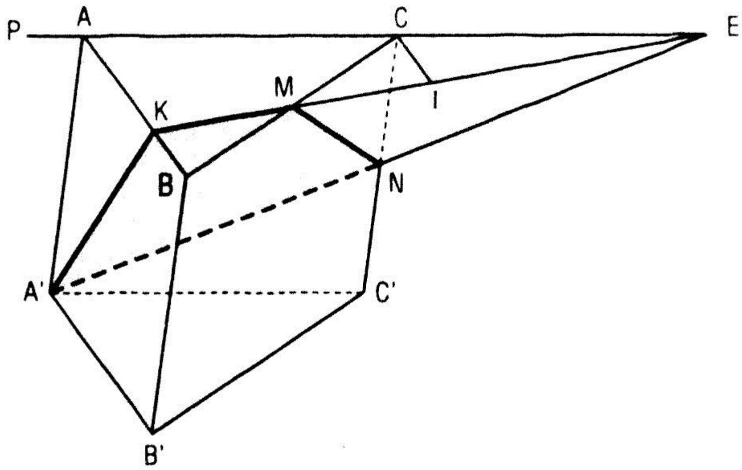
a) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (A'MN). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB.

b) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AA' và AB.

Hướng dẫn :

a) Tứ giác A'KMN là thiết diện cần tìm. C là trung điểm AE. Kẻ CI // AB thì

$CI = KB$ và $CI = \frac{1}{2}AK \Rightarrow AK = 2KB$. Vậy $\frac{AK}{KB} = 2$.



3. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, B'C' và DA'.*

a) Chứng minh (MNP) song song với các mặt phẳng (AB'D') và (BDC').

b) Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP). thiết diện là hình gì? Tính diện tích của nó.

Đáp số : b) Thiết diện là hình lục giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

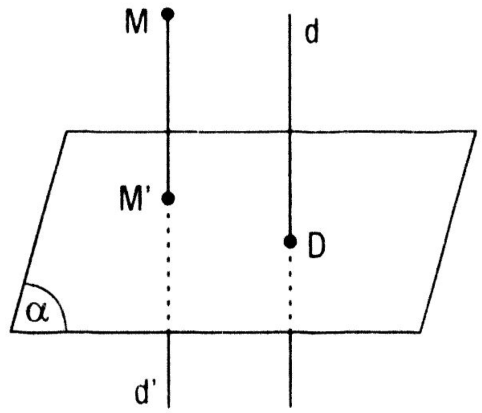
1. Định nghĩa phép chiếu song song :

Cho $d \cap \alpha = \{D\}$ và M trong không gian.

Qua M dựng đường thẳng $d' \,//\, d$ cắt α tại M'.

Qui tắc thực hiện từ một điểm M tìm được $M' \in \alpha$ gọi là ***phép chiếu song song lên mặt phẳng*** α ***theo phương của đường thẳng d.***

α : mặt chiếu
d : phương chiếu
M' : hình chiếu của M lên α theo phương chiếu d.



2. Tính chất :

■ ***Tính chất 1***

Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng.

● ***Hệ quả***

Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng, của một tia là một tia.

■ ***Tính chất 2***

Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

■ ***Tính chất 3***

Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).

3. Hình biểu diễn của một hình không gian :

■ ***Định nghĩa***

Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

■ ***Hình biểu diễn của một đường tròn***

Hình chiếu song song của một đường tròn là một elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

40. *Trong các mệnh sau, mệnh đề nào đúng?*

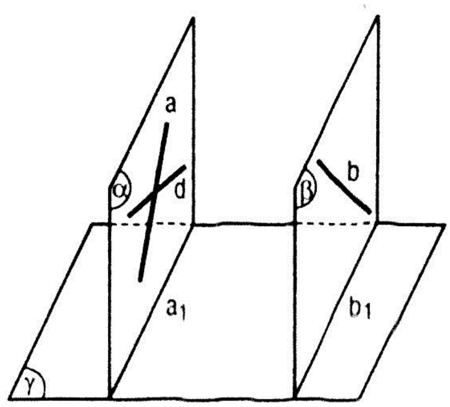
a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau.

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

● *Trả lời*



a) Sai vì nếu hình chiếu song song của hai đường thẳng mà trùng nhau thì hai đường thẳng đó cùng thuộc 1 mặt phẳng.

b) Sai vì hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

c) Đúng.

d) Sai.

41. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?*

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau.

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.

d) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu song song với nó.

e) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó.

f) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

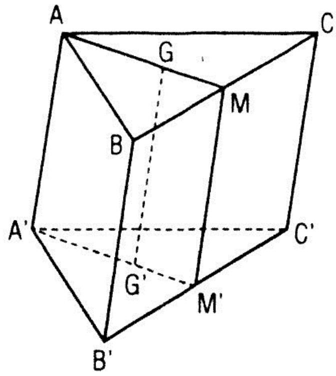
Trả lời

a) Sai b) Đúng c) Đúng

d) Đúng e) Sai f) Đúng

42. *Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác A'B'C'.*

Giải



Gọi G là trọng tâm ΔABC, M là trung điểm BC

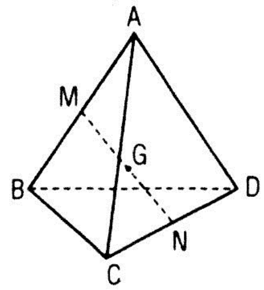
G', M' là hình chiếu song song của G và M.

Ta có M' là trung điểm B'C' và $\frac{A'G'}{G'M'} = \frac{AG}{GM} = 2$

⇒ G' là trọng tâm ΔA'B'C'.

43. *Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện và trọng tâm của nó.*

Trả lời

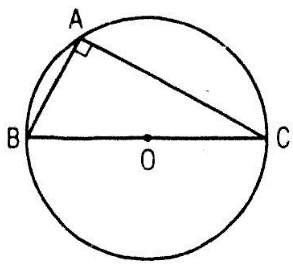


Hình biểu diễn của một tứ diện là tứ giác ABCD.

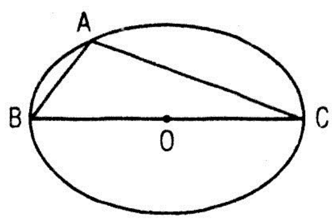
Lấy M và N lần lượt là trung điểm AB và CD thì trung điểm G của MN sẽ biểu diễn cho trọng tâm của tứ diện.

44. *Vẽ hình biểu diễn của một tam giác nội tiếp trong một đường tròn.*

Trả lời



Hình thật

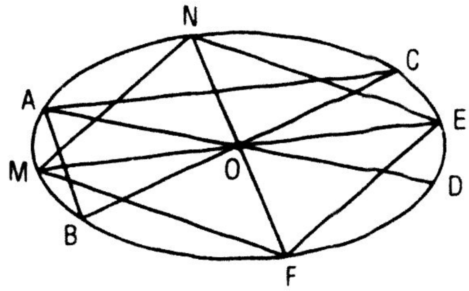


Vẽ elip tâm O là hình biểu diễn của đường tròn đã cho. Lấy B và C là hai điểm trên elip sao cho B, O, C thẳng hàng và một điểm A thuộc elip sao cho A khác B và C. Khi đó, tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.

45. *Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.*

Trả lời

Theo bài 44, vẽ tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn. Qua O ta kẻ hai dây ME và NF của elip lần lượt song song với AC và AB. Khi đó tứ giác MNEF là hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

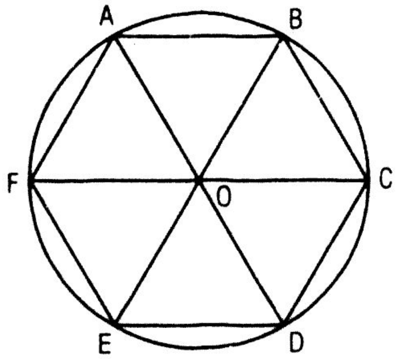


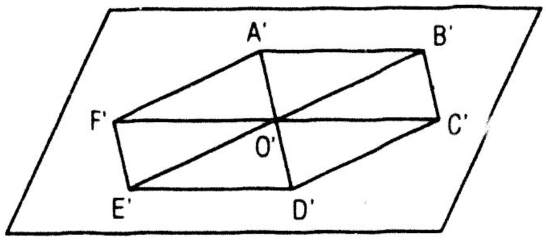
46. *Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.*

Trả lời

Xét hình lục giác đều ABCDEF, ta nhận thấy :

- Tứ giác OABC là hình thoi.
- Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O.





Từ đó ta suy ra cách vẽ hình biểu diễn của lục giác đều ABCDEF như sau :

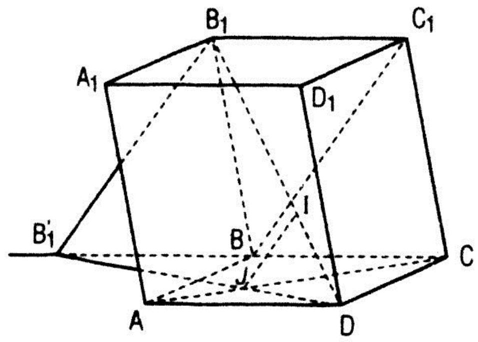
- Vẽ hình bình hành O'A'B'C' biểu diễn cho hình thoi OABC.
- Lấy các điểm D', E', F' lần lượt đối xứng với các điểm A', B', C' qua O, ta được hình biểu diễn A'B'C'D'E'F' của hình lục giác đều ABCDEF.

47. *Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm điểm I trên đường chéo B_1D và điểm J trên đường chéo AC sao cho $IJ \,//\, BC_1$. Tính tỉ số $\frac{ID}{IB_1}$.*

Giải

Giả sử ta tìm được $I \in B_1D$, $J \in AC$ sao cho $IJ \,//\, BC_1$. Xét phép chiếu song song theo phương BC_1 lên mp(ABCD). Khi đó hình chiếu của các điểm D, I B_1 lần lượt là D, J và B'_1. Do D, I, B_1 thẳng hàng nên D, J, B'_1 thẳng hàng. Vậy J chính là giao điểm của hai đường thẳng B'_1D và AC. Từ đó ta có thể tìm I, J như sau :

- Dựng B'_1 là hình chiếu B_1 qua phép chiếu song song ở trên ($BC_1B_1B'_1$ là hình bình hành).
- Dựng J là giao điểm của B'_1D với AC.
- Trong mp($B_1B'_1D$) kẻ JI song song với $B_1B'_1$ cắt B_1D tại I.



Rõ ràng I và J thoả mãn điều kiện của bài toán.

Dễ thấy B'_1 thuộc đường thẳng BC và $AD = \frac{1}{2}B'_1C$.

Từ đó suy ra : $\frac{ID}{IB_1} = \frac{ID}{JB'_1} = \frac{AD}{B'_1C} = \frac{1}{2}$. Vậy ta có : $\frac{ID}{IB_1} = \frac{1}{2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?*

a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

c) Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng thuộc một mặt phẳng.

d) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

Trả lời

a) Đúng b) Sai : có thể a // b

c) Đúng d) Sai : có thể a cắt b.

2. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?*

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

c) Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

e) Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại.

f) Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại.

g) Một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

Trả lời

a) Sai : có thể a cắt b hoặc a chéo b.

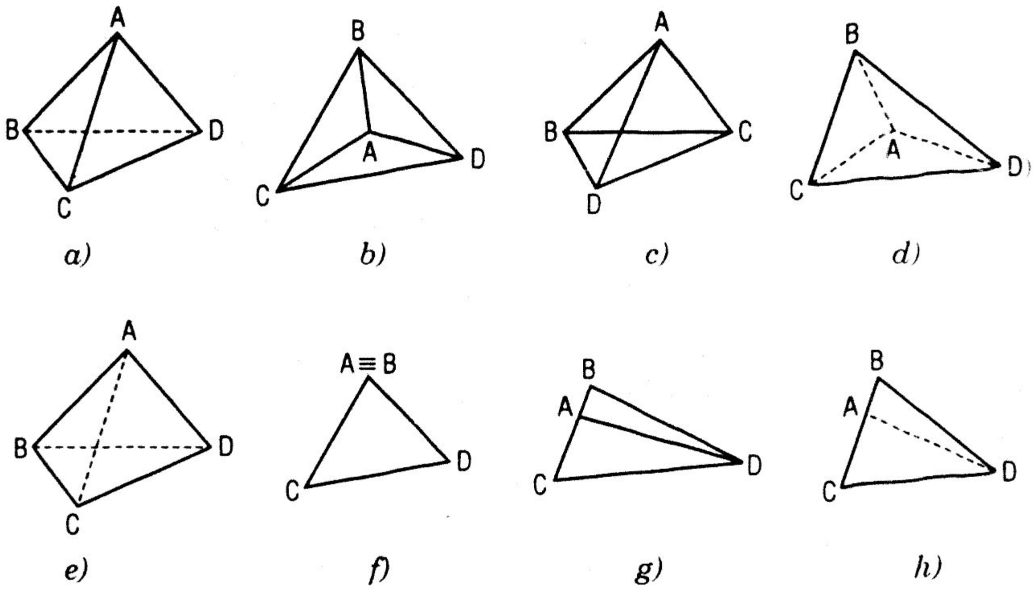
b) Sai : có thể (α) và (β) cắt nhau.

c) Đúng d) Đúng.

e) Sai : có thể cắt đường thứ nhất nhưng chéo nhau với đường thứ hai..

f) Đúng g) Đúng.

3. *Trong các hình sau, hình nào là hình biểu diễn của một tứ diện?*



Trả lời

Các hình a, b, d, f, g, h

4. *Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC, BF sao cho MC = 2AM; NF = 2BN. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1. Chứng minh rằng :*

a) MN // DE ;

b) M_1N_1 // mp(DEF) ;

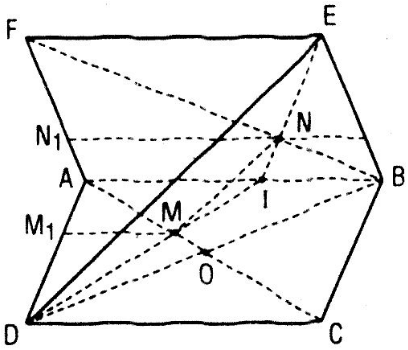
c) mp(MNN_1M_1) // mp(DEF).

Giải

a) Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD, ta có AO là trung tuyến và $\frac{AM}{AO} = \frac{2AM}{AC} = \frac{2}{3}$

⇒ M là trọng tâm của tam giác ABD, tương tự N là trọng tâm tam giác ABE.

Gọi I là trung điểm của AB thì M, N lần lượt trên DI và EI.



Trong tam giác IDE ta có : $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3}$

nên MN // DE và $MN = \frac{1}{3}DE$.

b) Trong ΔFAB : NN_1 // AB $\Rightarrow \frac{AN_1}{AF} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$

Trong ΔDAB : MM_1 // AB $\Rightarrow \frac{AM_1}{AD} = \frac{DM}{DI} = \frac{1}{3}$

Do đó $\frac{AN_1}{AF} = \frac{AM_1}{AD}$ nên M_1N_1 // DF

Mà DF $\subset$ (DEF) suy ra M_1N_1 // mp(DEF)

c) Ta có M_1N_1 // DF, NN_1 // EF

Mà M_1N_1 và NN_1 cắt nhau và nằm trong mp(MNN_1M_1), còn DF và EF cắt nhau và nằm trong mp(DEF)

Vậy mp(MNN_1M_1) // mp(DEF)

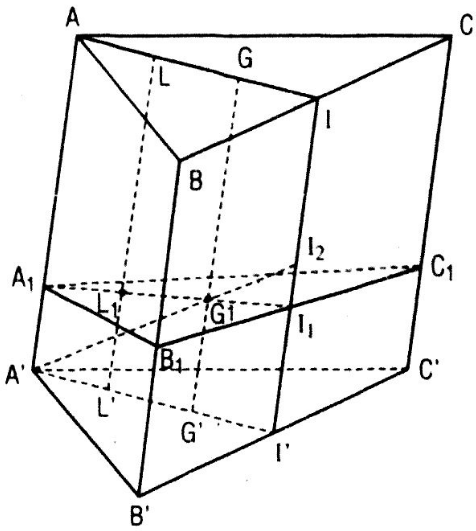
5. *Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', GG' lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và G_1. Chứng minh rằng :*

a) GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ ;

b) G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$;

c) $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$; $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

Giải



a) Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, B'C' thì rõ ràng II' song song và bằng AA' nên tứ giác AII'A' là hình bình hành, do đó AI song song và bằng A'I'.

Ta cũng có $AG = \frac{2}{3}AI$, $A'G' = \frac{2}{3}A'I'$, mà AI = A'I' suy ra AG song song và bằng A'G'.

Vậy tứ giác AGG'A' là hình bình hành.

Do đó, GG' song song và bằng AA'.

b) B_1C_1 cắt II' tại I_1 thì I_1 là trung điểm của B_1C_1.

Vì G_1 thuộc A_1I_1 và AA_1 // GG_1 // II_1 nên :

$\frac{G_1A_1}{A_1I_1} = \frac{GA}{AI} = \frac{2}{3}$. Vậy G_1 là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

c) Xét hình bình hành AII'A'. Gọi L, L' lần lượt là trung điểm của AG và A'G', L_1 là giao điểm của LL' và A_1I_1. Khi đó L_1 là trung điểm của A_1G_1. Theo định lí về đường trung bình của hình thang, ta có :

$$2G_1G' = L_1L' + I_1I' = \frac{1}{2}(A_1A' + G_1G') + I_1I'.$$

Suy ra $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + 2I_1I')$

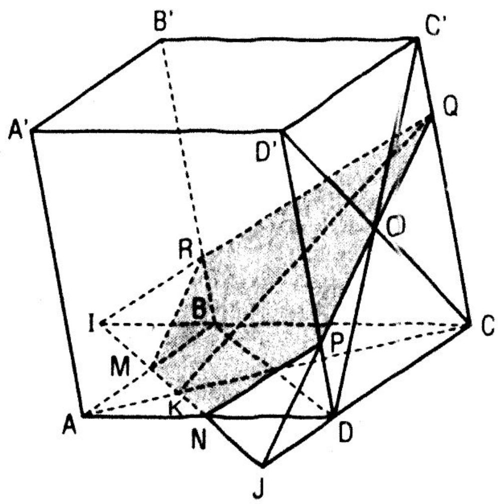
Mặt khác $2I_1I' = B_1B' + C_1C'$.

Vậy $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$.

Chứng minh tương tự, ta có : $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

6. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua hai trung điểm M, N của các cạnh AB, AD và tâm O của mặt CDD'C'.*

Giải



Gọi I và J lần lượt là các giao điểm của đường thẳng MN với BC và CD. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của đường thẳng JO với các cạnh DD', CC'. Gọi R là giao của BB' và đường thẳng IQ. Ta có :

(MNO) ∩ (ABCD) = MN

(MNO) ∩ (CDD'C') = PQ

(MNO) ∩ (ADD'A') = NP

(MNO) ∩ (BCC'B') = RQ

(MNO) ∩ (ABB'A') = MR.

Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác MNPQR.

7. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên ba cạnh AB, DD', C'B' lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho* $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$.

a) Chứng minh rằng mp(MNP) và mp(AB'D') song song với nhau.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(MNP).

Giải

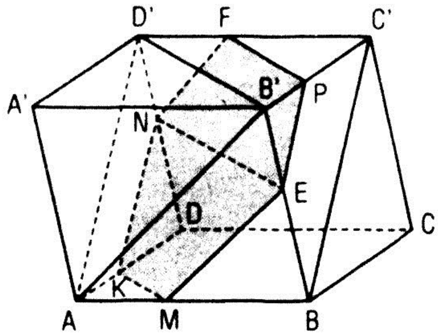
a) Kẻ ME song song với AB' (E ∈ BB'), (1)

Ta có $\frac{B'E}{B'B} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{B'E}{B'B} = \frac{B'P}{B'C'} \Rightarrow EP \parallel BC' \Rightarrow EP \parallel AD'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (MEP) // (AB'D'). (3)

Rõ ràng D'N = B'E nên EN // B'D'.

Mà B'D' ⊂ (AB'D') và E ∈ (MEP) nên từ (3) suy ra EN ⊂ (MEP), tức (MNP) chính là (MEP). Vậy (MNP) // (AB'D').



b) Từ M kẻ ME song song với AB', từ P kẻ PF song song với B'D'. Từ N kẻ NK song song với AD' cắt AD tại K. Thiết diện là lục giác MEPFNK có các cạnh đối song song.

8. *Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho AM = kBN (k > 0 cho trước).*

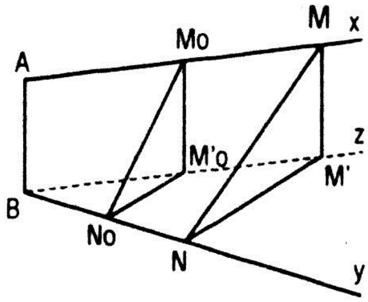
a) Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho IM = kIN.

Giải

a) Dựng tia Bz song song và cùng hướng với tia Ax. Trên các tia Ax, By và Bz lần lượt lấy các điểm cố định M_0, N_0 và M'_0 sao cho $\dfrac{AM_0}{BN_0} = k$ và $BM'_0 = AM_0$.

Khi đó ta có : $M_0M'_0$ // AB và $\dfrac{BM'_0}{BN_0} = k$ (1)



Lấy điểm M' thuộc tia Bz sao cho BM' = AM.

Khi đó ta có MM' // AB và $\dfrac{BM'}{BN} = k$. (2)

Từ (1) và (2) ta có MM' // $M_0M'_0$ (3)

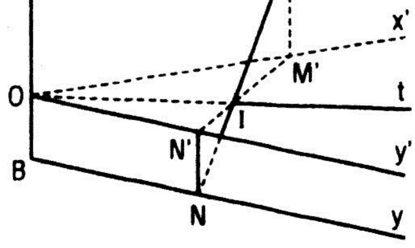
và $\dfrac{BM'}{BN} = \dfrac{BM'_0}{BN_0}$ (4)

Từ (4) suy ra NM' // $N_0M'_0$. (5)

Từ (3) và (5) suy ra mp(MNM') // mp($M_0N_0M'_0$). Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định ($M_0N_0M'_0$).

b) *Thuận.* Gọi O là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho OA : OB = k. Từ O ta vẽ hai tia Ox' và Oy' sao cho Ox' // Ax, Oy' // By. Xét phép chiếu song song theo phương AB lên mp(Ox', Oy'). Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu của M và N theo phép chiếu này. Khi đó giao điểm của MN và M'N' chính là điểm I vì rõ ràng ta có :

$$\frac{IM}{IN} = \frac{M'M}{N'N} = \frac{OA}{OB} = k.$$



Trong tam giác M'ON', ta có :

$$\frac{IM'}{IN'} = k, \frac{OM'}{ON'} = \frac{AM}{BN} = k.$$

Vậy $\frac{IM'}{IN'} = \frac{OM'}{ON'} = k$. Từ đó suy ra I phải nằm trên tia phân giác Ot của góc x'Oy'.

Đảo. Giả sử I là một điểm bất kì thuộc tia phân giác Ot của góc x'Oy'. Gọi M', N' là những điểm lần lượt thuộc tia Ox', tia Oy' sao cho M', I, N' thẳng hàng và $\frac{IM'}{IN'} = k$ (có thể tìm M', N' bằng cách dùng phép vị tự tâm I tỉ số $-k$ trên mp(Ox'y')). Gọi M, N lần lượt là những điểm thuộc các tia Ax, By sao cho AM = OM', BN = ON'. Dễ thấy I, M, N thẳng hàng và IM : IN = k.

Kết luận. Tập hợp các điểm I thoả mãn điều kiện bài toán là tia phân giác Ot của góc x'Oy'.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. *Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC; G là trọng tâm tam giác BCD. Khi ấy, giao điểm của đường thẳng MG và mp(ABC) là :*

(A) Điểm C;

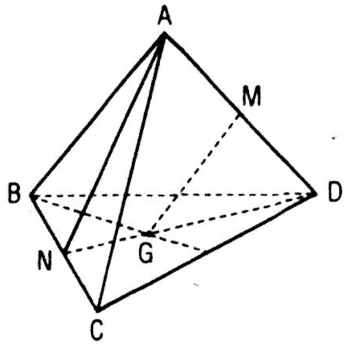
(B) Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng AN;

(C) Điểm N;

(D) Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng BC.

Trả lời

NA và MG cùng thuộc mặt phẳng (AND) và không song song nhau nên cắt nhau tại I thì I = MG ∩ (ABC). Chọn (B).



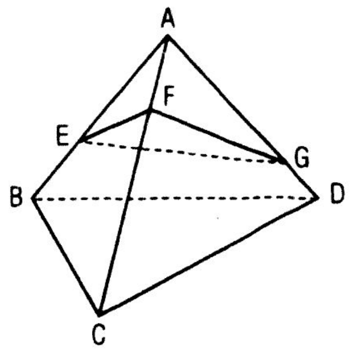
2. *Cho tứ diện ABCD và ba điểm E, F, G lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, AD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(EFG) là :*

(A) Một đoạn thẳng ; *(B) Một tam giác ;*

(C) Một tứ giác ; *(D) Một ngũ giác.*

Trả lời

Thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(EFG) là tam giác EFG. Chọn (B).



3. *Cho tứ diện ABCD và ba điểm I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(IJK) là :*

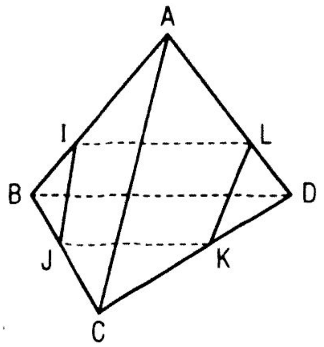
(A) Một tam giác ; *(B) Một tứ giác;*

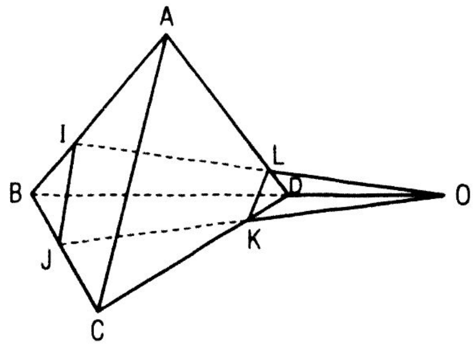
(C) Một hình thang ; *(D) Một ngũ giác.*

Trả lời

* Nếu JK // BD thì BD // (IJK) nên (IJK) $\cap$ (ABD) = IL // BD. Thiết diện là hình thang IJKL.

* Nếu JK $\cap$ BD = O, L = IO $\cap$ AD thì thiết diện là tứ giác IJKL. Chọn (B)





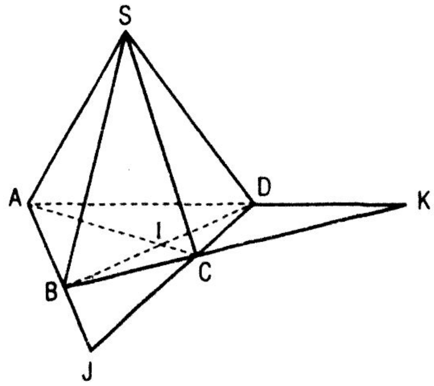
4. *Cho hình chóp S.ABCD. Gọi AC $\cap$ BD = I, AB $\cap$ CD = J, AD $\cap$ BC = K. Đẳng thức nào sai trong các đẳng thức sau đây?*

(A) (SAC) $\cap$ (SBD) = SI ; *(B) (SAB) $\cap$ (SCD) = SJ ;*

(C) (SAD) $\cap$ (SBC) = SK ; *(D) (SAC) $\cap$ (SAD) = AB.*

Trả lời

(SAC) $\cap$ (SAD) = SA. Chọn (D).



5. *Cho hình chóp S.ABCD. Một mặt phẳng không đi qua đỉnh nào của hình chóp cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.*

(A) Các đường thẳng A'C', B'D', SO đôi một chéo nhau;

(B) Các đường thẳng A'C', B'D', SO đồng phẳng;

(C) Các đường thẳng A'C', B'D', SO đồng quy;

(D) Hai đường thẳng A'C' và B'D' cắt nhau còn hai đường thẳng A'C' và SO chéo nhau.

Trả lời

Ta có $A'C' \subset mp(SAC)$

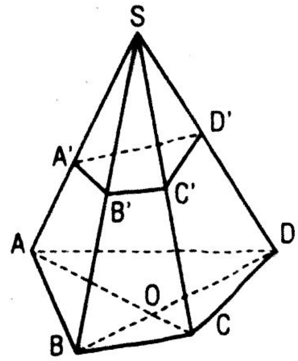
$B'D' \subset mp(SBD)$

và $(SAC) \cap (SBD) = SO$

Gọi $I = A'C' \cap B'D'$

thì $I \in SO$ do đó $A'C'$, $B'D'$, SO đồng quy.

Chọn (C).



6. *Cho tứ diện ABCD. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Mệnh đề nào dưới đây đúng?*

(A) Đường thẳng GE song song với đường thẳng CD;

(B) Đường thẳng GE cắt đường thẳng CD;

(C) Hai đường thẳng GE và CD chéo nhau;

(D) Đường thẳng GE cắt đường thẳng AD.

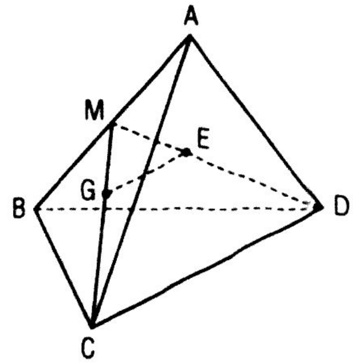
Trả lời

Gọi M là trung điểm AB

Trong ΔMCD ta có :

$$\frac{MG}{MC} = \frac{ME}{MD} = \frac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

$\Rightarrow GE \parallel CD$. Chọn (A)



7. *Cho tứ diện ABCD. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC và AC, N là điểm trên cạnh BD sao cho BN = 2ND. Gọi F là giao điểm của AD và mp(MNK). Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?*

(A) AF = FD ; *(B) AF = 2FD ;*

(C) AF = 3FD ; *(D) FD = 2AF.*

Trả lời

Gọi $I = MN \cap CD \Rightarrow F = KI \cap AD = AD \cap (MNK)$

Kẻ $DL \parallel BC$ ($L \in MI$)

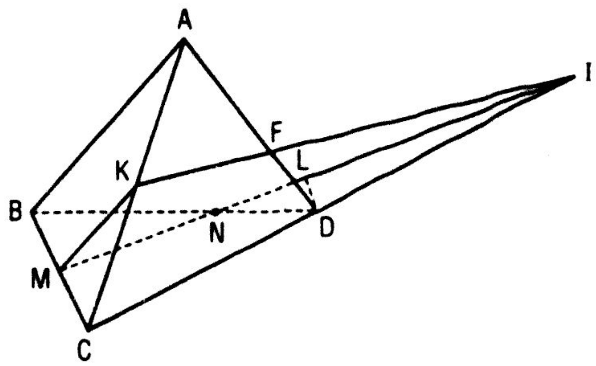
$$\frac{DL}{BM} = \frac{DN}{BN} = \frac{1}{2} \Rightarrow DL = \frac{1}{2}CM$$

$\Rightarrow$ D là trung điểm CI

Từ đó suy ra F là trọng tâm ΔACI

nên AF = 2 FD.

Chọn (B).



8. *Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mp(GCD) thì diện tích của thiết diện là :*

(A) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$;   (B) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$;   (C) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$;   (D) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

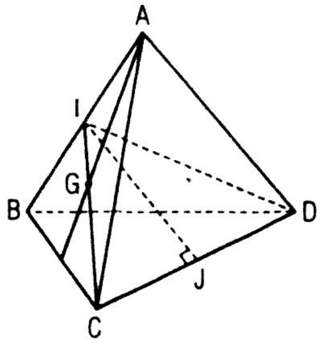
Trả lời

Gọi I là trung điểm của AB. Thiết diện cần tìm là ΔCID.

Gọi J là trung điểm CD

ΔCID cân nên $IJ \perp CD$.

$\Rightarrow S_{ICD} = \dfrac{1}{2}IJ.CD$



Ta có $IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow IJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ICD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. Chọn (B).

9. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Khi ấy, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường song song với :*

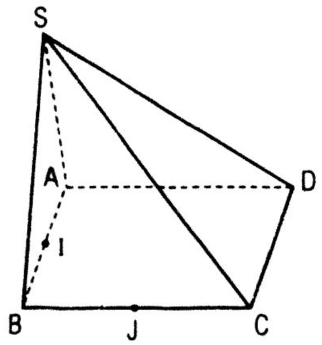
(A) Đường thẳng AD ;   *(B) Đường thẳng BJ ;*

(C) Đường thẳng BI ;   *(D) Đường thẳng IJ.*

Trả lời

Ta có AB // CD nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB.

Chọn (C).



10. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :*

(A) A'B' // mp(SAD) ;   *(B) A'C' // mp(SBD) ;*

(C) mp(A'C'D') // mp(ABC) ;   *(D) A'C' // BD.*

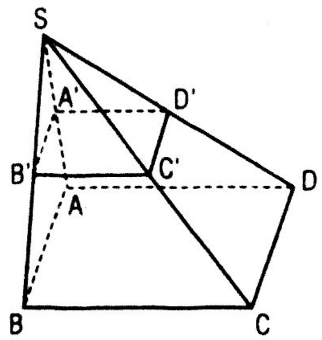
Trả lời

Ta có A'B' // AB, B'C' // BC

$\Rightarrow$ (ABCD) // (A'B'C'D')

$\Rightarrow$ (A'C'D') // (ABC).

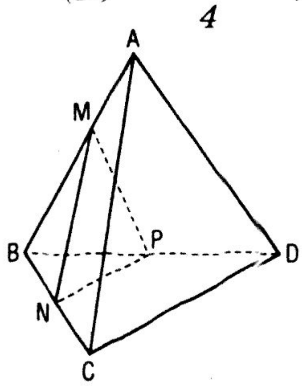
Chọn (C).



11. *Cho tứ diện ABCD có cạnh bằng a, điểm M trên cạnh AB sao cho AM = m (0 < m < a). Khi đó, diện tích thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với mp(ACD) là :*

(A) $\frac{m^2\sqrt{3}}{4}$; *(B)* $\frac{(a-m)^2\sqrt{2}}{2}$; *(C)* $\frac{(a+m)^2\sqrt{3}}{4}$; *(D)* $\frac{(a-m)^2\sqrt{3}}{4}$.

Trả lời



Vẽ MN // AC (N ∈ BC)

MP // AD (P ∈ BD)

Thiết diện cần tìm là ΔMNP

Ta có ΔMNP ∽ ΔACD tỉ số $\frac{MP}{AD} = \frac{BM}{AB} = \frac{a-m}{a}$

$S_{MNP} = \left(\frac{a-m}{a}\right)^2 . S_{ABC} = \left(\frac{a-m}{a}\right)^2 . \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (a-m)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Chọn (D).

12. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) song song với AC và SB lần lượt cắt các cạnh SA, AB, BC, SC, SD, BD tại M, N, E, F, I, J. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?*

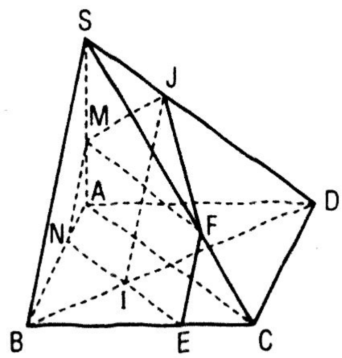
(A) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đôi một song song;

(B) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng quy;

(C)Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng phẳng;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Trả lời



(P) // AC và (P) //SB nên (P) cắt các mp(ASB), (SBC), (SBD) theo các giao tuyến MN // EF // IJ // SB. Chọn (A).

C. BÀI TẬP LÀM THÊM ÔN CHƯƠNG II

1. *Cho hình chóp S.ABCD, O là một điểm bên trong tam giác ABC. Qua O vẽ những đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC cắt các mặt SBC, SCA, SAB theo thứ tự A', B', C'.*

a) Chỉ cách dựng các điểm A', B', C'.

b) Chứng minh rằng : $\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC}$ *có giá trị không đổi khi O di động trong tam giác ABC.*

c) Định O để OA'.OB'.OC' có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn : a) Chứng minh AO, SA', BC đồng quy.

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số có tổng bằng 1.

2. *Cho tứ diện ABCD có AB = 2a, tam giác BCD vuông tại C có BD = 2a, BC = a. Gọi E là trung điểm của BD. Biết góc giữa AB và CD là 60^0.*

a) Tính $2AC^2 - AD^2$ theo a.

b) (α) là mặt phẳng song song với AB và CE, cắt các cạnh BC, BD, AE, AC theo thứ tự tại M, N, P, Q. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x = BM (0 < x < a). Định x để diện tích lớn nhất.

c) Định x để tổng các bình phương của các đường chéo của MNPQ là nhỏ nhất.

d) Gọi O là giao điểm của MP và NQ. Định a để $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn :

a) Gọi F là trung điểm của AD. Xét $\widehat{CEF} = 60^0, \widehat{CEF} = 120^0$

$2AC^2 - AD^2 = 6a^2$ hoặc $-2a^2$

b) $S = x(a - x)\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \frac{a}{2}$;

c) $x = \frac{a}{2}$.

d) $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$

O di động trên đoạn IJ. Nối trung điểm của AB và của CE. Tổng nhỏ nhất khi O là hình chiếu của G lên IJ (G là trọng tâm tứ diện ABCD).

3. *Cho hình chóp S.ABCD. Tứ giác đáy có AB và CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F. AC và BD cắt nhau tại G. (α) là mặt phẳng cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'.*

a) Tìm giao điểm D' của SD với (α).

b) Tìm điều kiện của (α) để A'B'C'D' là hình bình hành.

Chứng minh rằng khi đó : $\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} = \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}$

Hướng dẫn :

b) (α) // (SEF)

Gọi $\{G'\} = A'C' \cap B'D'$. Chứng minh $\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} = \frac{2SG'}{SG}$

4. *Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. M và P là hai điểm lần lượt di động trên AD và SC sao cho* $\frac{MA}{MD} = \frac{PS}{PC} = x$ *(x > 0).*

a) Chứng minh rằng MP luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định (α).

b) Tìm giao điểm I của mặt phẳng (SBD) với MP.

c) Mặt phẳng qua M và song song với (α) cắt hình chóp S.ABCD theo một thiết diện và cắt BD tại J. Chứng minh IJ có phương không đổi. Định x để PJ song song với mặt phẳng (SAD).

d) Định x để diện tích thiết diện bằng k lần diện tích tam giác SAB (k > 0).

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Sự đồng phẳng của các vectơ :

■ ***Định nghĩa***

Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

2. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng :

■ ***Định lí 1***

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó, ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

■ ***Định lí 2***

Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với vectơ $\vec{d}$ bất kì, ta đều tìm được các số m, n, p duy nhất sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có đồng phẳng không nếu một trong hai điều sau đây xảy ra?*

a) Có một vectơ trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

b) Có hai trong ba vectơ đó cùng phương.

Giải

a) Giả sử $\vec{a} = \vec{0}$. Áp dụng định lí 1 : $\vec{a} = 0.\vec{b} + 0.\vec{c}$ nên $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng

b) Giả sử $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương, khi đó có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow \vec{a} = k\vec{b} + 0.\vec{c}$ do đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

2. *Cho hình chóp S.ABCD.*

a) Chứng minh rằng nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Điều ngược lại có đúng không?

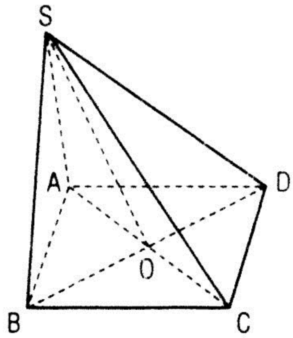
b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ rằng ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành



b) Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (*)

Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ suy ra

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$ (do (*))

Ngược lại giả sử $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$, ta có (*)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD thì

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$.

Từ (*) suy ra $2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\vec{0}$, điều này chứng tỏ O, M, N thẳng hàng. Mặt khác M thuộc AC, N thuộc BD và O là giao điểm của AC và BD nên O, M, N thẳng hàng chỉ xảy ra khi O ≡ M ≡ N, tức O là trung điểm của AC và BD, hay ABCD là hình bình hành.

3. *Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C', I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và A'B. Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.*

Giải

Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ thì $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

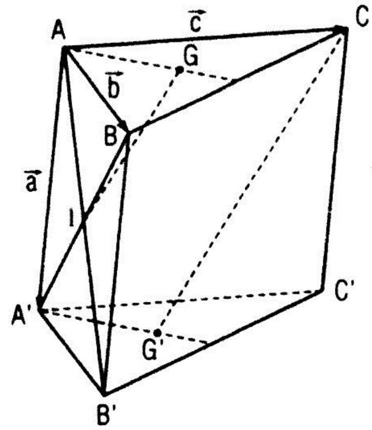
Do đó $\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AG}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{6}$.

Mặt khác : $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'})$

$=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

$\Rightarrow \overrightarrow{CG'}=\overrightarrow{AG'}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{c}$

$=\frac{3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{3}$



Vậy $\overrightarrow{CG'}=2\overrightarrow{GI}$. Ngoài ra điểm G không thuộc đường thẳng CG' nên GI và CG' là hai đường thẳng song song.

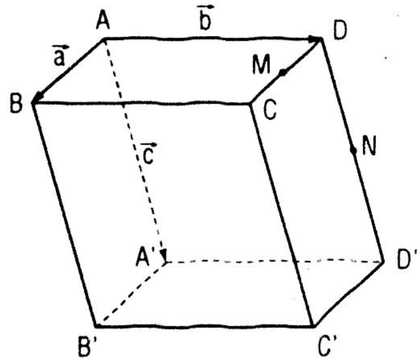
4. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A'D'MN và BCC'D'. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.*

Giải

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Vì G' là trọng tâm tứ diện BCC'D'

nên $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'})$ và G là trọng tâm của tứ diện A'D'MN

nên $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$.



$$\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{ND'})$$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{a} - \vec{c} + \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{8}(5\vec{a} - \vec{c})$$

$$= \frac{1}{8}(5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'})$$

Do đó $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{GG'}$ đồng phẳng. Mặt khác, G không thuộc mặt phẳng (ABB'A') nên đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.

5. *Trong không gian cho tam giác ABC.*

a) Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mp(ABC) thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O.

b) Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mp(ABC).

Giải

a) Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương nên điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có

$$\overrightarrow{AM} = l\,\overrightarrow{AB} + m\,\overrightarrow{AC}$$

hay $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = l(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$ với mọi điểm O

tức là $\overrightarrow{OM} = (1 - l - m)\overrightarrow{OA} + l\,\overrightarrow{OB} + m\,\overrightarrow{OC}$

Đặt $1 - l - m = x$, $l = y$, $m = z$ thì :

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với $x + y + z = 1$.

b) Giả sử $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với $x + y + z = 1$, ta có

$\overrightarrow{OM} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

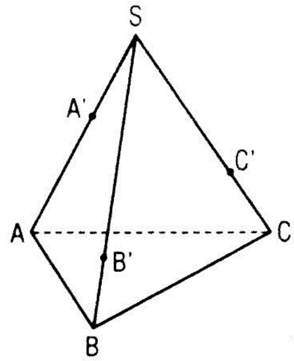
hay $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$

tức là $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$

mà $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên M thuộc mặt phẳng (ABC).

6. *Cho hình chóp S.ABC. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho SA = aSA', SB = bSB', SC = cSC', trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'B'C') đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi a + b + c = 3.*

Giải



Ta có : $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$$

Vậy $\overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$.

Mặt phẳng (A'B'C') đi qua G khi và chỉ khi bốn điểm G, A', B', C' đồng phẳng, nên theo bài tập 5 nêu trên, điều đó xảy ra nếu và chỉ nếu $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 1$, tức là a + b + c = 3.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, I là trung điểm của EF.*

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

b) M bất kì trong không gian, chứng minh : $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

c) Tìm M ∈ (P) cố định sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ *nhỏ nhất.*

Hướng dẫn :

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}$ và $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$

b) Áp dụng qui tắc 3 điểm xen I vào vế phải.

c) Áp dụng câu b) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MI}|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

2. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, gọi P', Q, Q' lần lượt là giao điểm các đường chéo của các mặt ABCD, CDD'C, A'B'C'D', ADD'A'.*

a. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$

b. Chứng minh rằng hai tam giác PQR, P'Q'R' có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn :

a. $\overrightarrow{PP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{QQ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0}.$$

b) Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm ΔPQR và $\Delta P'Q'R'$. Áp dụng a) và hệ ba điểm suy ra : $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

3. *Cho hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D'. Gọi G là trọng tâm tam giác A'B'C'.*

a) Chứng minh $\overrightarrow{BD'} = 3\,\overrightarrow{BG}$.

b) Gọi P, Q, R là ảnh đối xứng của điểm D' qua các điểm A, B', C. Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện PQRD'.

Hướng dẫn :

a) Áp dụng qui tắc trọng tâm $3\,\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD'}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Góc giữa hai đường thẳng :

■ ***Định nghĩa 1***

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng Δ'_1 và Δ'_2 cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1 và Δ_2.

Chú ý : *Nếu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của các đường thẳng Δ_1 và Δ_2 và $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng α hoặc $180^0 - \alpha$ tuỳ theo $\alpha \le 90^0$ hoặc $\alpha > 90^0$.*

2. Hai đường thẳng vuông góc :

■ ***Định nghĩa 2***

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

7. *Mỗi khẳng định sau có đúng không?*

a) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

b) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Trả lời

a) Sai : Lấy hai đường thẳng cắt nhau b, c nằm trong mp(P) và $a \perp (P)$. Khi đó, $a \perp b$, $a \perp c$ nhưng b, c cắt nhau.

b) Sai : Lấy $b \,//\, c$, $b, c \subset (P)$ và $a \perp (P)$.

8. *a) Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba vectơ $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng.*

b) Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì đồng phẳng. Từ đó suy ra các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

Giải

a) Nếu $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng thì có hai số k, l sao cho $\vec{n} = k\vec{a} + k\vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{n}.\vec{n} = k\vec{a}.\vec{n} + l\vec{b}.\vec{n} = 0 \Rightarrow |\vec{n}|^2 = \vec{n}^2 = 0 \Rightarrow |\vec{n}| = 0 \Rightarrow \vec{n} = \vec{0} \text{ (vô lý)}.$$

Vậy $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng.

b) Giả sử ba vectơ cùng vuông góc với $\vec{n}$ là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tức là $\vec{a}.\vec{n} = \vec{b}.\vec{n} = \vec{c}.\vec{n} = 0$.

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng phương thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ là ba vectơ không đồng phẳng (điều này suy ra từ câu a)). Khi đó $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{n}$. Nhân vô hướng hai vế với $\vec{n}$, ta có $\vec{c}.\vec{n} = x\vec{a}.\vec{n} + y\vec{b}.\vec{n} + z\vec{n}^2$, suy ra $z\vec{n}^2 = 0$ hay $z = 0$, tức là $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Vậy các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Nếu ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng vuông góc với một đường thẳng thì do kết quả nêu trên, ta có ba vectơ chỉ phương của ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng phẳng tức là ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng song song với một mặt phẳng.

9. *Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.*

Giải

Ta có $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$$= SA.SC.\cos\widehat{ASC} - SA.SB.\cos\widehat{ASB} = 0$$

$\Rightarrow SA \perp BC.$

Tương tự $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

10. *Cho hình tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại có đúng không?*

Giải

Ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD.$

Tương tự $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow AD \perp BC;$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow AB \perp CD.$

Như vậy, điều ngược lại cũng đúng.

11. *Cho hình tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = 60^0$, $\widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$. Chứng minh rằng :*

a) $AB \perp CD$;

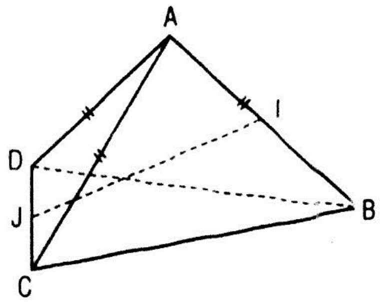
b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

Giải

a) Ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AD.\cos\widehat{BAD} - AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 0 \Rightarrow AB \perp CD.$

b) Ta có :



$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AB^2)$

$$= \frac{1}{2}(AB.AD.\cos 60^0 + AB.AC.\cos 60^0 - AB^2) = 0 \Rightarrow AB \perp IJ.$$

Mặt khác $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$$= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC})$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow CD \perp IJ.$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

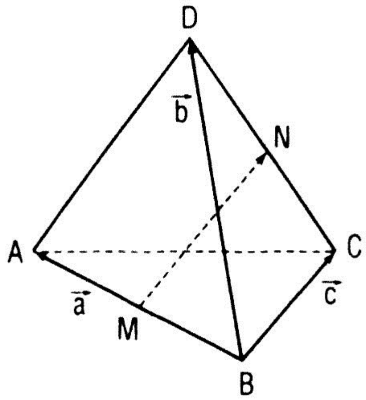
1. *Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD.*

a) Tính độ dài đoạn MN;

b) Tính góc giữa các đường thẳng MN và BC;

c) Chứng minh : $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

Hướng dẫn :



Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$$

và : $\vec{a}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \frac{1}{2}a^2$

Khi đó : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$

a) $\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})^2$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + a^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{c}) = \frac{1}{2}a^2$$

b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}a^2$, góc giữa MN, BC là 45^0

c) Ta có : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MN} = \vec{a}.\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a}.\vec{b} - a^2 + \vec{a}.\vec{c}) = 0$

$\Rightarrow MN \perp AB$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}).(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(a^2 - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{c}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{a} - a^2) = 0$

$\Rightarrow MN \perp CD$.

2. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt chia các đoạn thẳng AD' và DB theo cùng tỉ số k ($k \neq 0, 1$)*

a) Chứng minh rằng MN luôn luôn song song với mp(A'D'BC); và chứng minh rằng nếu $k = -\frac{1}{2}$ thì :

b) MN // A'C;

c) $MN \perp AD'$ và $MN \perp BD$.

Hướng dẫn :

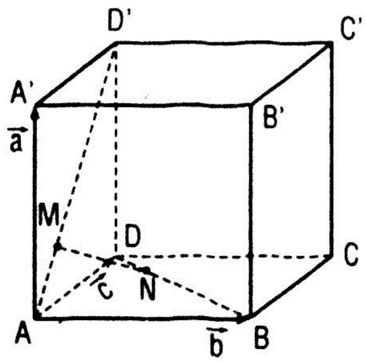
a) Đặt: $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Theo giả thiết, ta có: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD'})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AD'} = \frac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} - k\,\overrightarrow{AB}}{1-k} = \frac{\vec{c} - k\vec{b}}{1-k}$$



Suy ra:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{\vec{c} - k\vec{b} + k\vec{a} + k\vec{c}}{1-k}$$

$$= \frac{1}{1-k}[k(\vec{a} - \vec{b}) + (k+1)\vec{c})] = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA'} + \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{BC} \ (1)$$

Đẳng thức (1) chứng tỏ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng và do MN không thuộc mp(A'BCD') nên MN // mp(A'BCD')

Khi $k = -\frac{1}{2}$ thì (1) trở thành :

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$$

b) Và do các đường thẳng MN và A'C cắt mp(ABCD) tại các điểm khác nhau nên chúng không trùng nhau.

Vậy MN // A'C.

c) Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})(\vec{c} + \vec{a})$

$$= \frac{1}{3}\vec{b}(\vec{c} + \vec{a}) + \frac{1}{3}(\vec{c}^2 - \vec{a}^2) = 0$$

(Vì AB ⊥ mp(ADD'A') và ($\vec{a}^2 = \vec{c}^2$).

Vậy MN ⊥ AD'.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng :

■ ***Định nghĩa 1***

Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó. Kí hiệu là $a \perp (P)$.

■ ***Định lý 1***

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

$$\begin{cases} a \perp d, a \perp d' \\ d, d' \subset (P) \Rightarrow a \perp (P) \\ d \cap d' = \{O\} \end{cases}$$

2. Các tính chất :

■ ***Tính chất 1***

Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước

■ ***Tính chất 2***

Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước

3. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng :

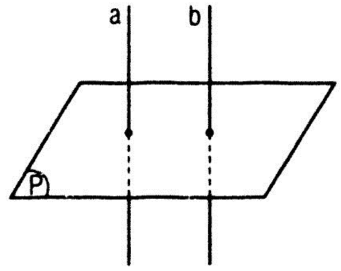
■ ***Tính chất 3***

a) Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

- $\begin{cases} a // b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \Rightarrow a // b \\ a \neq b \end{cases}$



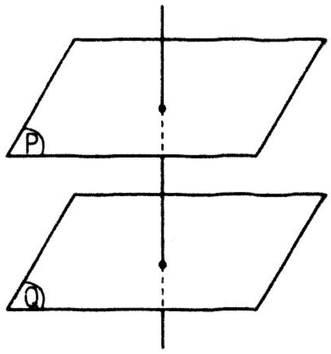
■ ***Tính chất 4***

a) Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

- $\begin{cases}(P)//(Q)\\ a\perp(P)\end{cases} \Rightarrow a\perp(Q)$

- $\begin{cases}(P)\perp a\\ (Q)\perp a\\ (P)\not\equiv(Q)\end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$



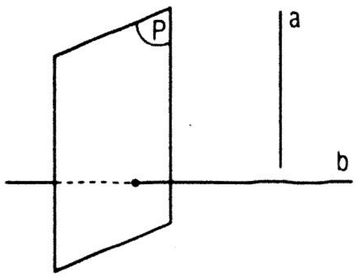
■ ***Tính chất 5***

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

- $\begin{cases}a//(P)\\ b\perp(P)\end{cases} \Rightarrow b\perp a$

- $\begin{cases}a\not\subset(P)\\ a\perp b\\ (P)\perp b\end{cases} \Rightarrow a//(P)$



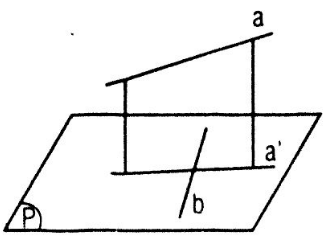
4. <u>Định lí ba đường vuông góc</u> :

■ ***Định nghĩa 2***

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P)

■ ***Định lí 2 (Định lí 3 đường vuông góc)***

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).



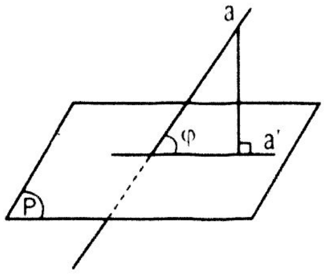
$$b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$$

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng :

- ***Định nghĩa 3***

Nếu đường thẳng a$\perp$ (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^o.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

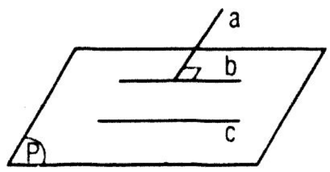


B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

14. *Khẳng định: "Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với (P)" có đúng không? Vì sao?*

● ***Trả lời***

Không đúng vì nếu a $\perp$ b và b // c (trong đó b, c nằm trong (P)) thì a chưa hẳn vuông góc với (P).



15. *Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Các mệnh đề sau đúng hay sai?*

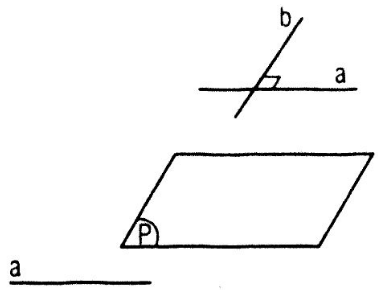
a) Nếu a // (P) và b $\perp$ (P) thì b $\perp$ a

b) Nếu a // (P) và b $\perp$ a thì b $\perp$ (P)

c) Nếu a // (P), b // a thì b // (P)

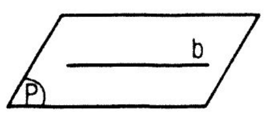
● ***Trả lời***

a) Đúng a // (β) nên tồn tại a'$\subset$ (P) sao cho a // a' mà b $\perp$ (P) nên b $\perp$ a'. Do đó b $\perp$ a



b) Sai b có thể song song với (P)

c) Sai b có thể nằm trong (P)



14. *Cho điểm S có hình chiếu trên mp(P) là H. Với điểm M bất kì trên (P) (M không trùng H), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn thẳng HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh rằng :*

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau.

b) Với đường xiên cho trước, đường xiên nào dài hơn thì có hình chiếu dài hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu ngắn hơn thì ngắn hơn.

Giải

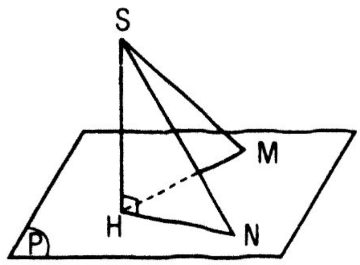
a) Giả sử HM, HN lần lượt là hình chiếu của SM, SN.

* Nếu SM = SN thì $\Delta SHM = \Delta SHN$ nên HM = HN.

Ngược lại nếu HM = HN thì

$\Delta SHM = \Delta SHN$ nên SM = SN.

Vậy SM = SN $\Leftrightarrow$ HM = HN.



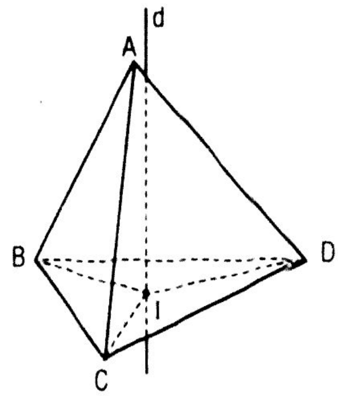
b) Áp dụng định lý Pytago ta có :

$SM^2 - HM^2 = SN^2 - HN^2$ ($= SH^2$)

$\Rightarrow SM^2 - SN^2 = HM^2 - HN^2$. Từ đó suy ra : SM > SN $\Leftrightarrow$ HM > HN (đpcm).

15. *Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.*

Giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔBCD. Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Theo kết quả bài 14. M $\in$ d $\Leftrightarrow$ MB = MC = MD (d gọi là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD).

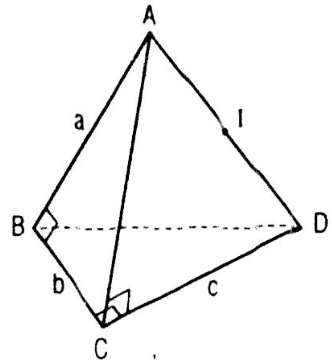
Gọi O là giao điểm của d với mặt phẳng trung trực của AB thì O cách đều bốn đỉnh của tứ diện (O gọi là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD).

16. *Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc và AB = a, BC = b, CD = c.*

a) Tính độ dài AD ;

b) Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D.

Giải



a) Ta có CD $\perp$ BC và CD $\perp$ AB nên CD $\perp$ (ABC)

Mà AC $\subset$ (ABC) do đó CD $\perp$ AC.

Trong tam giác vuông ABC ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$

Trong tam giác vuông ACD ta có :

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

b) Ta có $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ suy ra $AB \perp (BCD)$ do đó $AB \perp BD$. Gọi I là trung điểm AD ta có IC = IA = ID = IB. Vậy I cách đều A, B, C, D.

17. *Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc.*

a) Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn.

b) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mp(ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Giải

a) Đặt a = OA, b = OB, c = OC. Ta có:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}, BC = \sqrt{b^2 + c^2}, AC = \sqrt{a^2 + c^2}$$

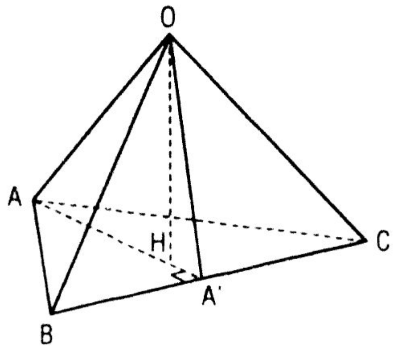
Áp dụng định lí Cosin trong tam giác ABC ta có :

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AB.AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - b^2 - c^2}{AB.AC} = \frac{2a^2}{AB.AC} > 0$$

$\Rightarrow$ A nhọn. Tương tự B, C là các góc nhọn.

Vậy ΔABC có ba góc nhọn.

b) Vì H là hình chiếu của điểm O trên mp(ABC) nên $OH \perp (ABC)$. Mặt khác $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp BC$. Vậy $AH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc), tức là H thuộc một đường cao của tam giác ABC. Tương tự như trên ta cũng có H thuộc đường cao thứ hai của tam giác ABC. Vậy H là trực tâm tam giác ABC.



c) Nếu $AH \perp BC$ tại A' thì $BC \perp OA'$. Vì OH là đường cao của tam giác vuông AOA' (vuông tại O) và OA' là đường cao của tam giác vuông BOC (vuông tại O) nên :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2}, \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Vậy $$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

18. *Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp mp(ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :*

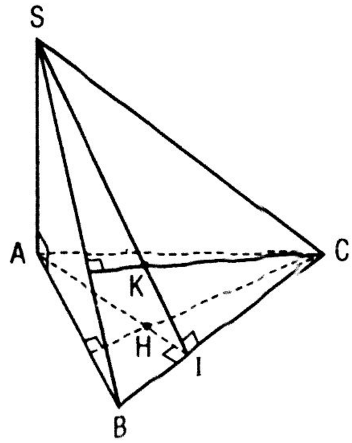
a) AH, SK, BC đồng quy ; *b) $SC \perp mp(BHK)$;* *c) $HK \perp mp(SBC)$.*

Giải

a) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AH và BC

Ta có $BC \perp AH$ (do H là trực tâm ΔABC)

$BC \perp SA$ (do $SA \perp mp(ABC)$)



Suy ra $BC \perp (SAI)$ mà $SI \subset (SAI)$ nên $BC \perp SI$

K là trực tâm ΔSBC nên SI qua K.

Vậy AH, SK, BC đồng quy tại I.

b) Ta có $BH \perp AC$ và $BH \perp SA$ nên

$BH \perp mp(SAC)$ suy ra $BH \perp SC$.

Mặt khác $SC \perp BK$ nên $SC \perp mp(BHK)$

c) Ta có $SC \perp HK$ (do $HK \perp mp(BHK)$)

Mà $HK \perp BC$ (do $BC \perp mp(ASI)$)

Vậy $HK \perp (SBC)$

19. *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và SA = SB = SC = b. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.*

a) Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG.

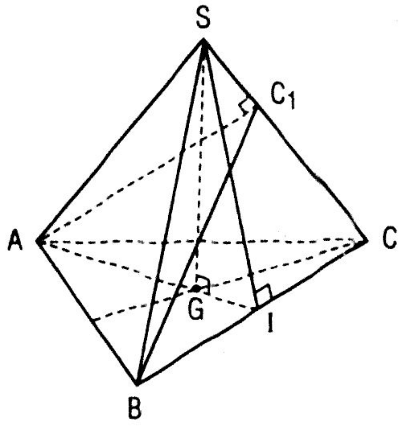
b) Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại C_1 nằm giữa S và C. Khi đó hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(P).

Giải

a) Vì SA = SB = SC nên S nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mà G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $SG \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $AI \perp BC$ và $BC \perp SI$

$$SI = \sqrt{SC^2 - IC^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$$

$$GI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}.a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



Trong tam giác vuông SGI ta có :

$$SG = \sqrt{SI^2 - GI^2} = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4} - \frac{a^2}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{12b^2 - 4a^2}{12}} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}$$

b) Kẻ $AC_1 \perp SC$ thì (P) chính là $mp(ABC_1)$

Vì SAC là tam giác cân mà $AC_1 \perp SC$ nên C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^o$

$\Leftrightarrow AS^2 + CS^2 > AC^2 \Leftrightarrow 2b^2 > a^2$

Ta có $AB \perp GC$ và $AB \perp SG$ suy ra $AB \perp SC$

$SC \perp AC_1$ và $SC \perp AB$ nên $SC \perp (ABC_1)$

Thể tích tứ diện SABC là :

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SG.S_{ABC} = \frac{1}{3}SC.S_{ABC_1}$$

$$\Rightarrow S_{ABC_1} = \frac{SG.S_{ABC}}{SC} = \frac{\sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{b} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$$

26 *a) Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Vậy, các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ diện như thế gọi là tứ diện trực tâm.*

b) Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương:

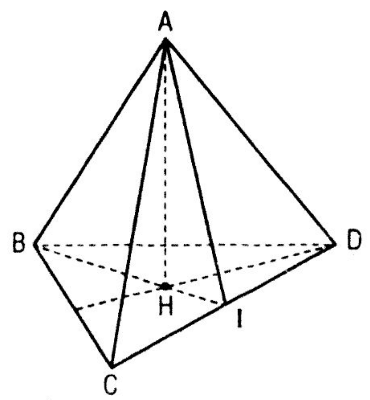
i) ABCD là tứ diện trực tâm.

ii) Chân đường cao của tứ diện hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện.

iii) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + DB^2 = AD^2 + BC^2$.

c) Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tứ diện nói trên.

Giải



a) Kẻ $AH \perp (BCD)$, $H \in (BCD)$

Ta có $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH)$

Mà $BH \subset (ABH)$ nên $CD \perp BH$ (1)

Tương tự $\begin{cases} BD \perp AH \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACH)$

$\Rightarrow BD \perp CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác BCD

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AD$

b) Theo chứng minh câu a) ta có i) $\Leftrightarrow$ ii)

Mặt khác ta có $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AD \perp BC$

Tương tự $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$

Vậy i) $\Leftrightarrow$ iii)

c) Gọi K là trực tâm tam giác ACD thì K nằm trên AI (với $BI \perp CD$). Từ đó suy ra AH và BK cắt nhau do chúng cùng thuộc mp(ABI).

Tương tự bốn đường cao của tứ diện trực tâm cắt nhau đôi một và không cùng nằm trên một mặt phẳng nên chúng đồng quy.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho tứ diện ABCD*

a) Chứng minh rằng $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

b) Từ đó suy ra nếu một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

2. *Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và* $SA = a\sqrt{3}$. *M là điểm tùy ý trên cạnh AB, đặt AM = x* $(0 < x < a)$. *Gọi* (α) *là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.*

a) Tìm thiết diện của tứ diện SABC với (α).

b) Tính diện tích thiết diện này theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện có giá trị lớn nhất.

Đáp số : b) $S = \sqrt{3}\,x\,(a - x)$, S lớn nhất khi $x = \frac{a}{2}$

3. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a,* $SA \perp (ABCD)$ *và SA = a*

a) Tìm trên mặt phẳng (ABCD) một điểm cách đều ba điểm S, B, C và tính khoảng cách ấy và khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (SBC).

b) Tìm trên mặt phẳng (SBC) một điểm cách đều ba điểm B, C, M với M là trung điểm cạnh CD.

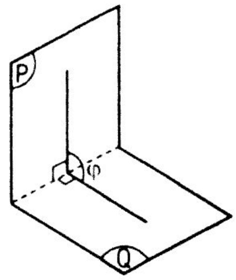
Tính khoảng cách chung ấy.

Đáp số : a) Trung điểm AD, $\frac{a\sqrt{5}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. <u>Góc giữa hai mặt phẳng</u> :



■ ***Định nghĩa 1***

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

■ ***Định lí 1***

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì $S' = S\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

2. <u>Hai mặt phẳng vuông góc</u> :

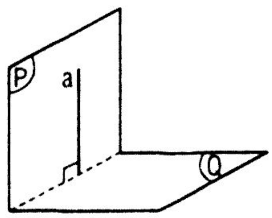
■ ***Định nghĩa 2***

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0. Ký hiệu là $(P) \perp (Q)$.

■ ***Định lí 2 (Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc)***

Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$



■ ***Định lí 3***

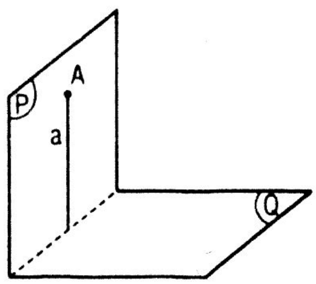
Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d;\ (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$

Hệ quả 1

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

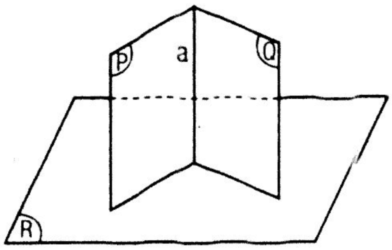
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$



Hệ quả 2

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(R)$$



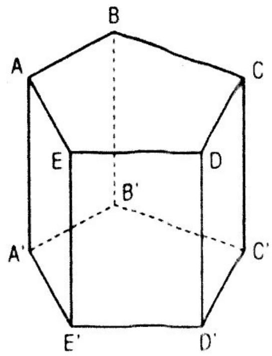
Hệ quả 3

Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

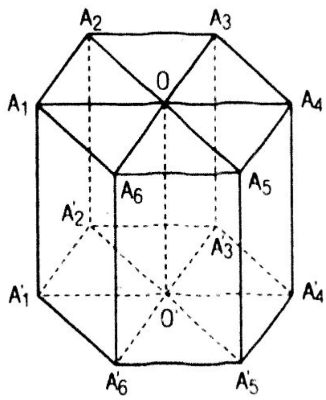
3. Hình lăng trụ đứng - Hình hộp chữ nhật - Hình lập phương :

■ ***Định nghĩa 3***

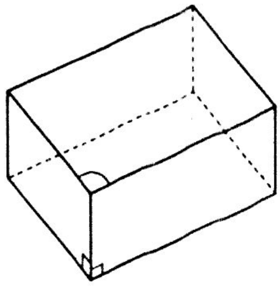
Hình lăng trụ đứng :
Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.



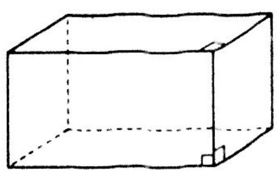
Hình lăng trụ đều :
Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.



Hình hộp đứng :
Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

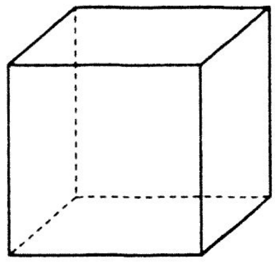


Hình hộp chữ nhật :
Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.



Hình lập phương :

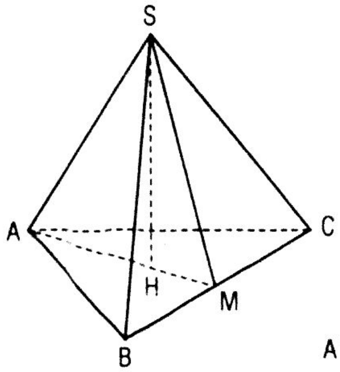
Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

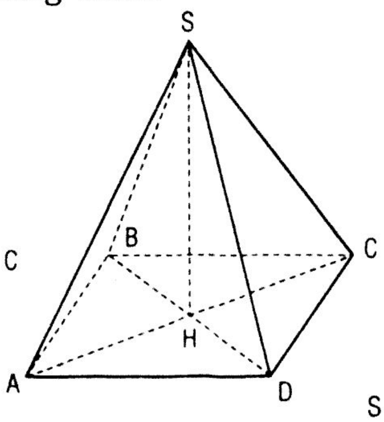


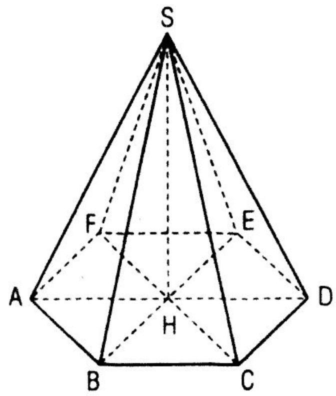
4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều :

■ ***Định nghĩa 4***

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

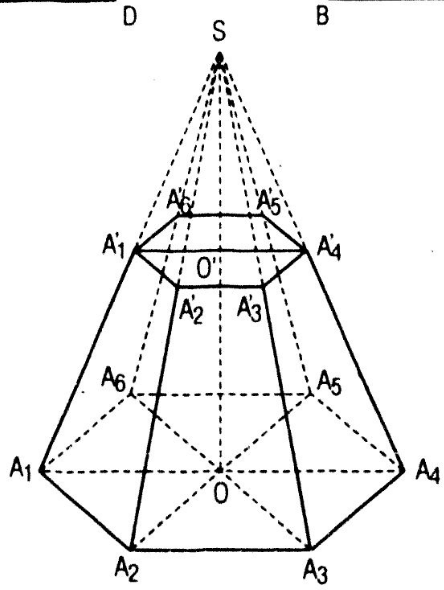






■ ***Định nghĩa 5***

Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là hình chóp cụt đều.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

21. *Các mệnh đề sau đúng hay sai?*

a) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau;

b) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau;

c) Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước;

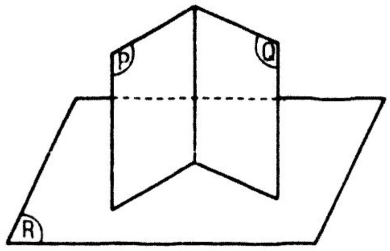
d) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước;

e) Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định;

f) Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng;

g) Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

Trả lời



a) Sai $(P) \perp (R)$, $(Q) \perp (R)$ nhưng (P) và (Q) cắt nhau như hình vẽ sau.

b) Sai $(P) \perp (R)$, $(Q) \perp (R)$ nhưng (P) có thể song song với (Q).

c) Sai. Lấy $a \perp (R)$ thì có vô số mặt phẳng (P) chứa a và vuông góc với (R).

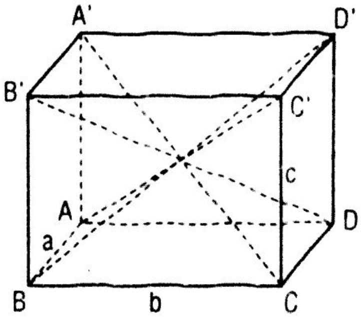
d), e), g) Đúng.

f) Sai.

22. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c. Nếu $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không? Vì sao?*

Giải

Áp dụng tính chất: "Tổng bình phương hai đường chéo hình bình hành bằng tổng bình phương 4 cạnh của nó" (BT 38, 4, chương II)



Ta có: $AC'^2 + A'C^2 = 2(AA'^2 + A'C'^2)$

$B'D^2 + BD'^2 = 2(BB'^2 + BD^2)$

$\Rightarrow AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2$

$= 2(c^2 + c^2 + AC^2 + BD^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Rightarrow A'C = AC' = B'D = BD'$

$\Rightarrow$ AA'C'C và BB'D'D là các hình chữ nhật,

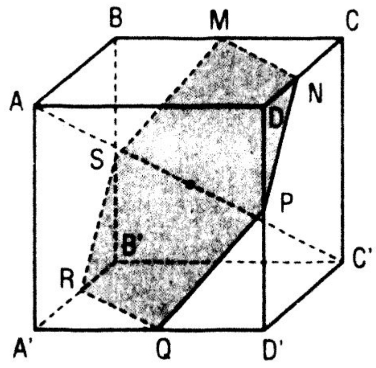
từ đó suy ra $AA' \perp AC$ và $AA' \perp BD$. Do đó $AA' \perp (ABCD)$, tức hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.

23. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.*

a) Chứng minh rằng AC' vuông góc với hai mặt phẳng (A'BD) và (B'CD').

b) Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích thiết diện đó.

Giải



a) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Vậy $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}).(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0.$

Tương tự, ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BA'} = 0.$

Vậy $AC' \perp (A'BD)$.

Do $(A'BD) \,//\, (B'CD')$ nên $AC' \perp (B'CD')$.

b) Gọi M là trung điểm của BC thì MA = MC' (vì cùng bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$) nên M thuộc mặt phẳng trung trực (α) của AC'.

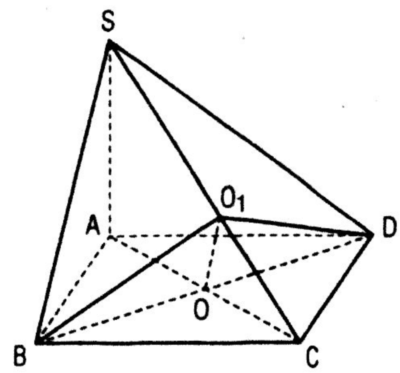
Tương tự, ta chứng minh được N, P, Q, R, S cũng có tính chất đó (N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của CD, DD', D'A', A'B', B'B).

Vậy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mp(α) là MNPQRS. Đây là lục giác đều cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Từ đó ta tính được diện tích của thiết diện là :

$$S = 6.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

24. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và SA $\perp$ (ABCD), SA = x. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60°.*

Giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ OO_1 vuông góc với SC, dễ thấy mp(BO_1D) vuông góc với SC. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) bằng góc giữa hai đường thẳng BO_1 và DO_1. Mặt khác $OO_1 \perp BD$, $OO_1 < OC$ mà OC = OB nên $\widehat{BO_1O} > 45^\circ$. Tương tự $\widehat{DO_1O} > 45^\circ$, tức $\widehat{BO_1D} > 90^\circ$.

Như vậy, hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60° khi và chỉ khi

$$\widehat{BO_1D} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{BO_1O} = 60^\circ \text{ (vì } \Delta BO_1D \text{ cân tại } O_1)$$

$$\Leftrightarrow BO = OO_1\tan 60^\circ \Leftrightarrow BO = OO_1\sqrt{3}.$$

Ta lại có : $OO_1 = OC\sin\widehat{OCO_1} = OC\sin\widehat{ACS} = OC.\dfrac{SA}{SC}.$

Như vậy : $BO = OO_1\sqrt{3} \Leftrightarrow BO = \sqrt{3}.OC.\dfrac{SA}{SC} \Leftrightarrow SC = \sqrt{3}.SA$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3}.x \Leftrightarrow x = a$$

Vậy khi x = a thì hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60°.

25. *Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C ∈ (P), D ∈ (Q) sao cho AC ⊥ AB, BD ⊥ AB và AB = AC = BD. Xác định thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD. Tính diện tích thiết diện khi AC = AB = BD = a.*

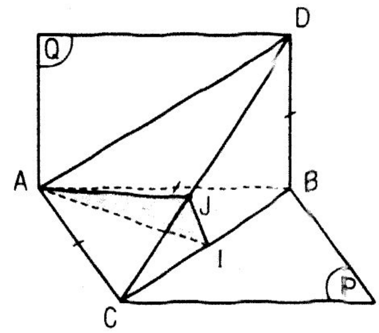
Giải

Gọi I là trung điểm của BC thì AI ⊥ BC. Do BD ⊥ mp(ABC) nên AI ⊥ CD (định lí ba đường vuông góc).

Trong mp(CDB), kẻ IJ vuông góc với CD (J ∈ CD) thì mp(AIJ) chính là mặt phẳng (α) và thiết diện phải tìm là tam giác AIJ.

Tam giác AIJ là tam giác vuông tại I.

Vậy $S_{AIJ} = \dfrac{1}{2}AI.IJ.$



Ta có $AI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

$$\frac{IJ}{DB} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow IJ = \frac{CI}{CD}.DB = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}}.a = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $S_{AIJ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}.$

26. *Hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp gì nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau?*

a) Tứ diện AB'CD' có các cạnh đối bằng nhau;

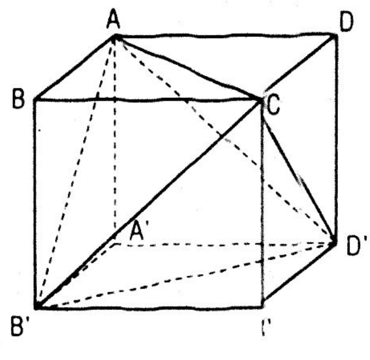
b) Tứ diện AB'CD' có các cạnh đối vuông góc;

c) Tứ diện AB'CD' là tứ diện đều.

Giải

a) Ta có B'D' = BD.

Vậy AC = B'D' ⇔ AC = BD, khi đó ABCD là hình chữ nhật.



Tương tự ta cũng có ABB'A' và ADD'A' là những hình chữ nhật. Vậy khi tứ diện AB'CD' có các cạnh đối diện bằng nhau thì ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.

Ngược lại, khi ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật thì dễ thấy tứ diện AB'CD' có các cạnh đối diện bằng nhau.

b) Ta có BD // B'D'. Vậy $AC \perp B'D' \Leftrightarrow AC \perp BD$. Khi đó ABCD là hình thoi. Tương tự như trên ta cũng có ABB'A' và ADD'A' là những hình thoi. Vậy hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thoi (tức sáu mặt của hình hộp là hình thoi).

Cũng dễ thấy rằng nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thoi thì tứ diện AB'CD' có các cạnh đối diện vuông góc.

c) Khi AB'CD' là tứ diện đều thì các cạnh đối diện vừa bằng nhau vừa vuông góc; áp dụng kết quả của các câu a) và b) ta có: Khi AB'CD' là tứ diện đều thì hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương.

Ngược lại nếu ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương thì AB'CD' là tứ diện đều.

27. *Cho hai tam giác ACD, BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.*

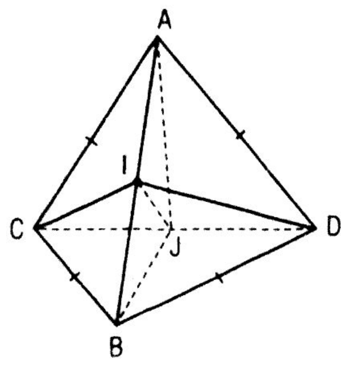
a) Tính AB, IJ theo a và x.

b) Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc?

Giải

a) Vì J là trung điểm của CD và AC = AD nên $AJ \perp CD$. Do $mp(ACD) \perp mp(BCD)$ nên $AJ \perp mp(BCD)$. Mặc khác AC = AD = BC = BD nên tam giác AJB vuông cân, suy ra $AB = AJ\sqrt{2}$, $AJ^2 = a^2 - x^2$ hay $AJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Vậy $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ với a > x.



Do IA = IB, tam giác AJB vuông tại J nên

$JI = \frac{1}{2}AB$, tức là : $IJ = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

b) Rõ ràng là CI và DI vuông góc với AB.

Vậy $mp(ABC) \perp mp(ABD) \Leftrightarrow \widehat{CID} = 90^o$

$$\Leftrightarrow IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}.2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

28. *Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mp(P) và mp(ABC) là φ ($\varphi \neq 90^o$); hình chiếu của tam giác ABC trên mp(P) là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi$*

Hướng dẫn : Xét hai trường hợp

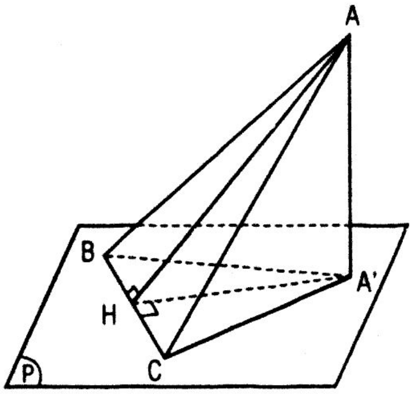
a) Tam giác ABC có một cạnh song song hoặc nằm trong mp(P).

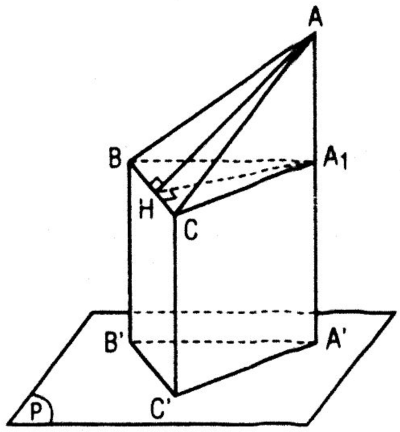
b) Tam giác ABC không có cạnh nào song song hay nằm trong mp(P).

Giải

a) Xét trường hợp tam giác ABC có một cạnh, chẳng hạn BC nằm trong mp(P). Gọi A' là hình chiếu của A trên mp(P). Kẻ đường cao A'H của tam giác A'BC ($H \in BC$) thì AH là đường cao của tam giác ABC và $\widehat{AHA'} = \varphi$, $A'H = AH\cos\varphi$.

Ta có : $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}BC.A'H = \dfrac{1}{2}BC.AH\cos\varphi = S_{ABC}.\cos\varphi$.





Trường hợp cạnh BC của tam giác ABC song song với mp(P). Xét mp(Q) chứa BC và song song với mp(P), gọi giao điểm của AA' với mp(Q) là A_1. Khi đó ta có $\Delta A_1BC = \Delta A'B'C'$; góc giữa mp(ABC) và mp(Q) bằng φ. Do đó : $S_{A'B'C'} = S_{A_1BC} = S_{ABC}.\cos\varphi$.

b) Xét trường hợp tam giác ABC không có cạnh nào song song hay nằm trong mp(P).Ta có thể giả sử mp(P) đi qua điểm A sao cho các đỉnh B, C ở về cùng một phía đối với mp(P). Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC và mp(P); B', C' lần lượt là hình chiếu của B, C trên (P) thì B'C' đi qua D. Khi đó theo trường hợp a) ta có :

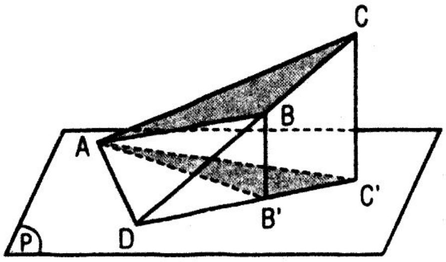
$$S_{ADC'} = S_{ADC}.\cos\varphi.$$

$$S_{ADB'} = S_{ABD}.\cos\varphi.$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên ta có :

$$S_{AB'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi.$$

Vậy mọi trường hợp ta đều có $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi$.



§5. KHOẢNG CÁCH

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. **Định nghĩa 1 :**

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) (hoặc đến đường thẳng Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H trong đó H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (P) (hoặc trên đường thẳng Δ).

2. **Định nghĩa 2 :**

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).

3. **Định nghĩa 3 :**

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

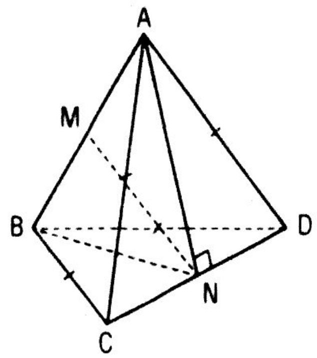
4. **Định nghĩa 4 :**

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

29. *Cho tứ diện ABCD có AC = BC = AD = BD = a, AB = c, CD = c'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.*

Giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

ΔACD cân nên AN ⊥ CD và ΔBCD cân nên BN ⊥ CD.

Do đó CD ⊥ (ABN) suy ra CD ⊥ MN. Tương tự ta cũng có AB ⊥ MN. Vậy d(AB, CD) = MN

Ta có $MN^2 = AN^2 - AM^2 = AD^2 - ND^2 - AM^2$

$$= a^2 - \frac{c'^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{1}{4}(4a^2 - c'^2 - c^2).$$

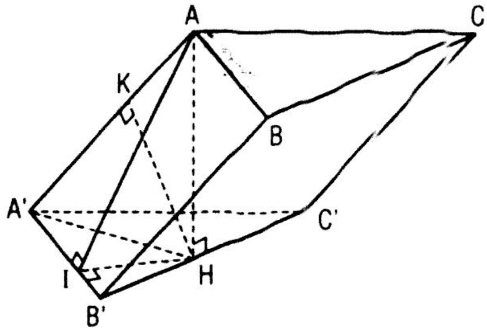
Vậy $MN = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c'^2 - c^2}$ với điều kiện $4a^2 > c^2 + c'^2$

30. *Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'.*

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và B'C' vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

Giải



Ta có $AH \perp (A'B'C')$ nên $\widehat{AA'H}$ là góc giữa AA' và mp(A'B'C') do đó $\widehat{AA'H} = 30^o$

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy chính là AH, ta có :

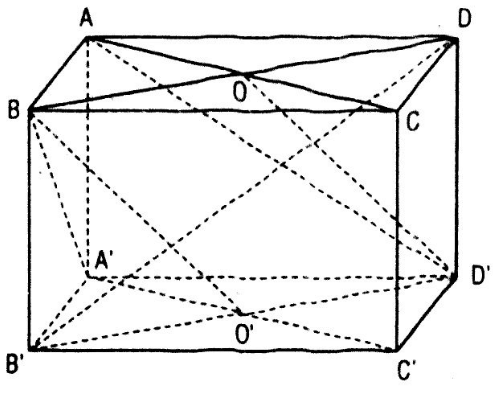
$$AH = AA'\sin 30^o = \frac{a}{2}.$$

b) Tam giác AHA' vuông tại H nên $A'H = AA'\cos 30^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vì A'B'C' là tam giác đều cạnh a, H thuộc đường thẳng B'C' mà $A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $A'H \perp B'C'$ và H là trung điểm B'C'. Mặt khác $AH \perp B'C'$ nên $AA' \perp B'C'$. Kẻ đường cao HK của tam giác AA'H thì HK chính là khoảng cách giữa AA' và B'C'. Do AA'.HK = AH. A'H nên $HK = \dfrac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

31. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.*

Giải

Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình vuông ABCD, A'B'C'D' của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.



* Ta chứng minh $B'D \perp (BA'C)$ và $B'D \perp (ACD')$

Ta có $\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BB'D'D)$

Mà $B'D \subset (BB'D'D)$ nên $B'D \perp A'C'$ (1)

Tương tự $\begin{cases} AB' \perp A'B \\ A'B \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (AB'C'D)$

Mà $B'D \subset (AB'C'D)$ nên $B'D \perp A'B$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B'D \perp (BA'C')$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $B'D \perp (ACD')$

* Hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD') song song với nhau, vuông góc với đoạn B'D và chia B'D thành 3 phần bằng nhau (xét hình bình hành BB'DD' và BO // D'O).

Do đó khoảng cách giữa mp(BA'C) và mp(ACD') là $\dfrac{B'D}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

* Khoảng cách giữa BC' và CD'

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BC' và CD' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: mp(BA'C') và mp(ACD'). Vậy khoảng cách đó là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

32. *Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = a, AC' = 2a.*

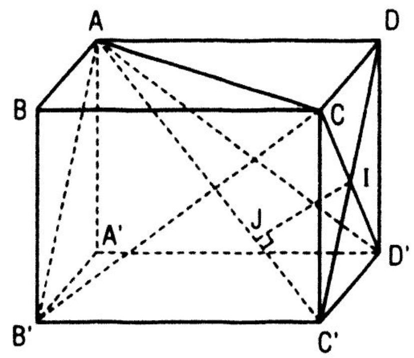
a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').

b) Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng AC' và CD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

Giải

a) Xét tứ diện DACD' có DA, DC, DD' đôi một vuông góc nên khoảng cách DH từ D đến mặt phẳng (ACD') được tính bởi hệ thức :

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}$$



(BT 17, chương III, SGK). Ta có :

$DC = a$, $DD' = a$,

$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = DA^2 + DC^2 + CC'^2$

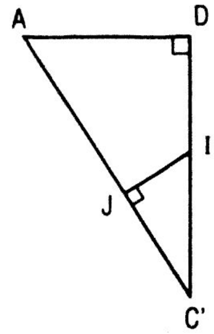
hay $4a^2 = DA^2 + a^2 + a^2$, tức là $DA^2 = 2a^2$.

Vậy $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2}$

Do đó $DH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

b) Vì CD = DD' = a nên CD' ⊥ C'D. Mặt khác AD ⊥ (CDD'C') nên CD' ⊥ AC' và CD' ⊥ mp(AC'D). Gọi giao điểm của CD' với mp(AC'D) là I. Trong mp(AC'D) kẻ IJ vuông góc với AC' tại J thì IJ là đường vuông góc chung của AC' và CD'.

Ta tính khoảng cách giữa AC' và CD'



Ta có ΔC'JI ∽ ΔC'DA nên $\dfrac{IJ}{AD} = \dfrac{IC'}{AC'}$,

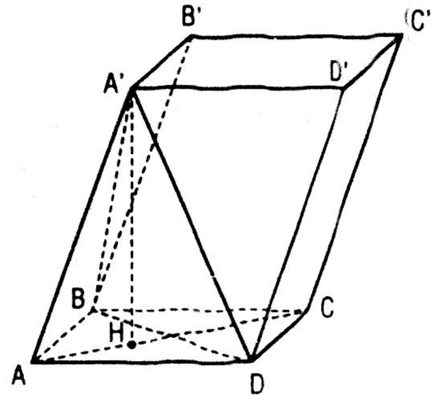
Suy ra $IJ = AD.\dfrac{C'D}{2AC'}$.

Mặt khác $C'D = a\sqrt{2}$ nên $IJ = a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2.2a} = \dfrac{a}{2}$.

33. *Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^o$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D').*

Giải

Từ giả thiết suy ra các tam giác A'AD, BAD, A'AB là các tam giác cân cùng có góc ở đỉnh bằng 60° nên chúng là các tam giác đều. Như vậy tứ diện A'ABD có các cạnh cùng bằng a hay A'ABD là tứ diện đều. Khi đó hình chiếu của A' trên mp(ABCD) chính là trọng tâm H của tam giác đều ABD. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D') chính là độ dài A'H. Ta có :



$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}.$$

Vậy $\quad A'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

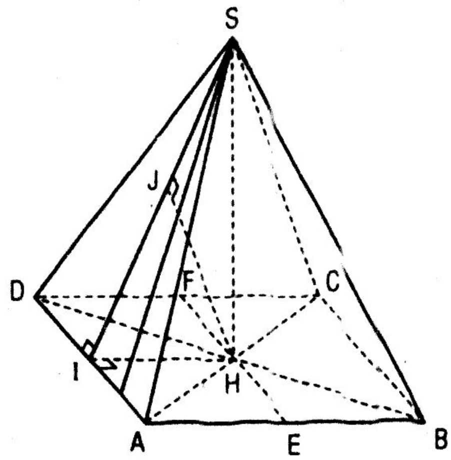
34. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.*

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABCD).

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD; K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K, hãy tính khoảng cách đó theo a.

Giải

a) Vì SA = SB = SC = SD = $a\sqrt{2}$ nên hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H mà HA = HB = HC = HD. Do ABCD là hình chữ nhật nên H chính là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ S đến mp(ABCD) bằng SH. Ta có:



$$SH^2 = SA^2 - \frac{AC^2}{4} = 2a^2 - \frac{AB^2 + BC^2}{4}$$

$$= 2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ tức là } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Vì EF // AD nên EF // mp(SAD), mặt khác SK nằm trong mp(SAD) nên khoảng cách giữa EF và SK chính là khoảng cách giữa EF và mp(SAD),

đó cũng chính là khoảng cách từ H đến mp(SAD). Vậy khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của điểm K trên đường thẳng AD.

Tính d(EF; SK) :

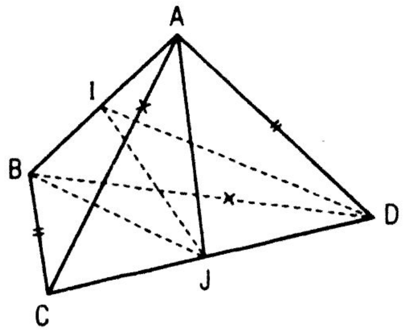
Gọi I là trung điểm của AD, kẻ đường cao HJ của tam giác vuông SHI thì $HJ \perp mp(SAD)$, do đó d(H; (SAD)) = HJ. Ta có : HJ.SI = SH.HI

$$SI^2 = SA^2 - AI^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}.$$

Từ đó $$HJ = \frac{SH.HI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Như vậy, khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của điểm K trên đường thẳng AD và bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

35. *Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu AC = BD, AD = BC thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường thẳng nối trung điểm của AB và CD. Điều ngược lại có đúng không?*



Giải

a) Vì AC = BD, AD = BC nên tam giác ACD bằng tam giác BDC, từ đó hai trung tuyến tương ứng AJ và BJ bằng nhau (ở đó J là trung điểm của CD). Gọi I là trung điểm của AB thì ta có $JI \perp AB$. Tương tự như trên ta cũng có $JI \perp CD$. Vậy IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Điều ngược lại của kết luận nêu ra trong bài toán cũng đúng, tức là nếu $IJ \perp AB$, $IJ \perp CD$, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì AC = BD; AD = BC.

Thật vậy, vì $IJ \perp AB$, I là trung điểm của AB nên AJ = BJ. Mặt khác

$$AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{CD^2}{2}.$$

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{CD^2}{2}.$$

Từ đó ta có $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$. (1)

Tương tự như trên ta cũng có :

$$CB^2 + CA^2 = DB^2 + DA^2. \ (2)$$

Từ (1), (2) ta suy ra $AD^2 - BC^2 = BC^2 - DA^2$, tức là DA = BC và từ (1) ta cũng có AC = BD.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Trong hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) cho hai tam giác cân ACD và BCD có chung đáy CD = 2x và các cạnh khác có độ dài bằng a. Gọi M và N là trung điểm của AB và CD.*

a) Chứng minh rằng MN và đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Tính theo a và x độ dài các đoạn AB và MN.

2. *Tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$; $\widehat{BOC} = 90^o$*

a) Tính độ dài các cạnh còn lại của tứ diện và chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b) Chứng minh OA $\perp$ BC, gọi I, J lần lượt là trung điểm của OA và BC, chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của OA và BC.

c) Chứng minh rằng (ABC) $\perp$ (OBC). Tính độ dài đoạn IJ theo a.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

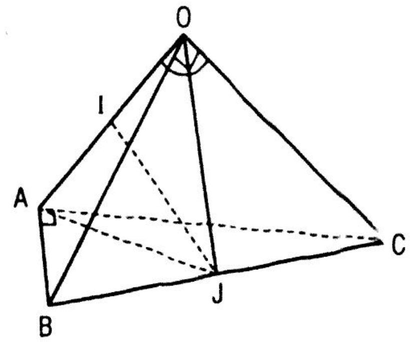
1. *Tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$; $\widehat{BOC} = 90^o$*

a) Chứng tỏ rằng ABC là tam giác vuông và OA $\perp$ BC.

b) Tìm đường vuông góc chung IJ của OA và BC; tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

Giải



a) Vì $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$

$OA = OB = OC = a$

nên $AB = AC = a$.

Suy ra $\Delta ABC = \Delta OBC$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi J là trung điểm của BC thì OJ $\perp$ BC, AJ $\perp$ BC nên OA $\perp$ BC.

b) Gọi I là trung điểm của OA, do OJ = AJ nên JI $\perp$ OA, mà JI $\perp$ BC, vậy IJ là đường vuông góc chung của OA và BC.

$$IJ^2 = OJ^2 - OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Suy ra $d(OA; BC) = \frac{a}{2}$.

c) Từ các kết quả trên ta có $OJ \perp BC$, $AJ \perp BC$, $IJ = \frac{1}{2}OA$.

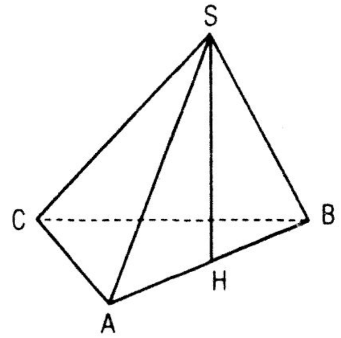
Vậy góc giữa mp(OBC) và mp(ABC) bằng góc $\widehat{OJA}$ và $\widehat{OJA} = 90^o$, do đó mp(OBC) ⊥ mp(ABC).

2 *Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 120^o$, $\widehat{BSC} = 60^o$, $\widehat{CSA} = 90^o$.*

a) Chứng tỏ rằng ABC là tam giác vuông.

b) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

Giải



a) Ta có : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC})(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC})$

$= \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} + SC^2$

$= a^2\cos 120^o - a^2\cos 90^o - a^2\cos 60^o + a^2$

$= a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow CA \perp CB$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

b) Kẻ SH ⊥ mp(ABC), do SA = SB = SC nên HA = HB = HC mà ΔABC vuông tại C nên H là trung điểm của AB. Ta có :

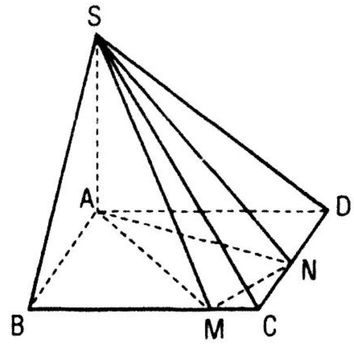
$$SH^2 = SA^2 - \frac{AB^2}{4} = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4}, \text{ tức là } SH = \frac{a}{2}.$$

3. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD). Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD, đặt CM = x, CN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để :*

a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^0;

b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Giải



a) Ta có AM, AN cùng vuông góc với SA mà $\widehat{MAN} \le 90^0$ nên $\widehat{MAN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN). Hai mặt phẳng đó tạo với nhau góc 45^0 khi và chỉ khi $\widehat{MAN} = 45^0$.

Mặt khác M ∈ BC, N ∈ CD, $\widehat{BAD} = 90^0$ nên điều đó xảy ra khi $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^0$, từ đó ta có :

$$1 = \frac{\tan\widehat{BAM} + \tan\widehat{DAN}}{1 - \tan\widehat{BAM}\tan\widehat{DAN}}. \ (*)$$

(Áp dụng công thức $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$)

Vì $\tan\widehat{BAM} = \dfrac{a-x}{a}$, $\tan\widehat{DAN} = \dfrac{a-y}{a}$, nên (*) $\Leftrightarrow 2a^2 + xy = 2a(x+y)$.

Đó là hệ thức liên hệ giữa x và y để các mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^0.

b) Ta có (SAM) ⊥ (ABCD), từ đó nếu (SMN) ⊥ (SAM) thì giao tuyến MN của (SMN) và (ABCD) sẽ vuông góc với (SAM), tức MN ⊥ AM.

Ngược lại, nếu có MN ⊥ AM thì do SA ⊥ MN nên MN ⊥ (SAM), suy ra (SMN) ⊥ (SAM).

Vậy (SAM) ⊥ (SMN) khi và chỉ khi $\widehat{AMN} = 90^0$.

$\Leftrightarrow a^2 + (a-x)^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (a-y)^2$

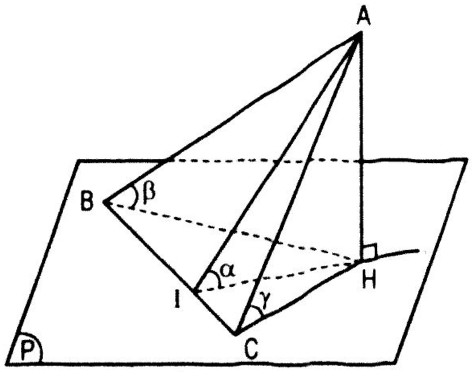
$\Leftrightarrow ay = x(a-x)$ với $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$

4. *Tam giác ABC vuông có cạnh huyền BC nằm trong mp(P), cạnh AB và AC lần lượt tạo với mp(P) các góc β và γ. Gọi α là góc tạo bởi mp(P) và mp(ABC). Chứng minh rằng $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.*

Giải

Kẻ AH ⊥ mp(P) và AI ⊥ BC thì

$\beta = \widehat{ABH}, \gamma = \widehat{ACH}, \alpha = \widehat{AIH}$.



Vì ΔABC vuông ở A nên:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AH^2}{AI^2} = \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}$$

hay $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

5. *Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Tính diện tích các tam giác HAB, HBC, HCA.*

Giải

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc và H là hình chiếu của O trên mp(ABC) nên H là trực tâm tam giác ABC (BT17, chương III, SGK). Từ đó $HC_1 \perp AB$ (C_1 là giao điểm của CH và AB), suy ra $OC_1 \perp AB$. Như vậy $\widehat{OC_1H}$ là góc giữa mp(OAB) và mp(ABC).

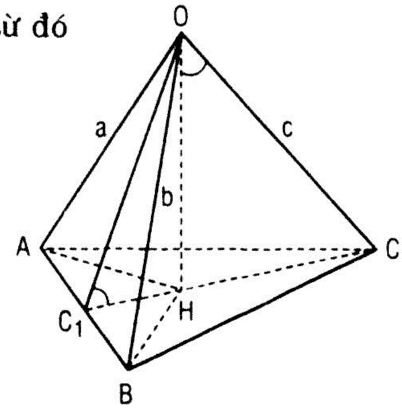
Ta có : $S_{HAB} = S_{OAB} \cos\widehat{OC_1H}$

mà $\widehat{OC_1H} = \widehat{HOC}$ nên $S_{HAB} = S_{OAB}\cos\widehat{HOC}$

Ta lại có :

$$\cos\widehat{HOC} = \frac{OH}{OC}, \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}, \text{ từ đó}$$

$$\cos\widehat{HOC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$



Mặt khác $S_{OAB} = \frac{1}{2}ab$.

Vậy $S_{HAB} = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Tương tự như trên ta có : $S_{HBC} = \frac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$;

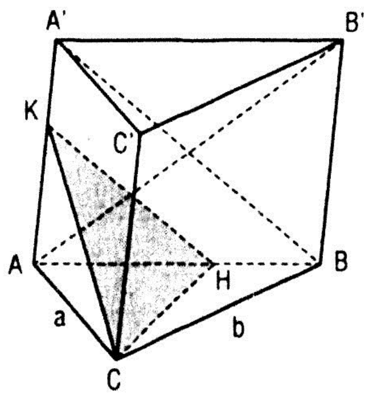
$$S_{HAC} = \frac{c^2a^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

6. *Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh C, CA = a, CB = b; mặt bên ABB'A' là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'.*

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P). Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện nói trên.

Giải



a) Kẻ đường cao CH của tam giác vuông ABC thì CH ⊥ AB' (định lí ba đường vuông góc). Trong mp(ABB'A') kẻ đường thẳng Ht vuông góc với AB'. Khi đó (P) chính là mp(CHt). Chú ý rằng do ABB'A' là hình vuông nên AB' ⊥ A'B. Vậy Ht // A'B, từ đó Ht cắt AA' tại điểm K thuộc đoạn AA'. Như vậy, thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mp(P) là tam giác CHK.

Do CH ⊥ AB, mp(ABB'A') ⊥ mp(ABC) nên CH ⊥ (ABB'A'), từ đó tam giác CHK vuông tại H.

b) $S_{CHK} = \frac{1}{2}CH.HK$.

$$CH.AB = CA.CB \Rightarrow CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$AH.\ AB = a^2 \Rightarrow AH = \frac{a^2}{AB},$$

$$\frac{HK}{A'B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow HK = A'B.\frac{a^2}{AB^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}.a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Từ đó $S_{CHK} = \frac{1}{2}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

tức là $S_{CHK} = \frac{a^3b\sqrt{2}}{2(a^2+b^2)}$.

7. *Một tứ diện được gọi là gần đều nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Với tứ diện ABCD, chứng tỏ các tính chất sau là tương đương.*

a) Tứ diện ABCD là gần đều.

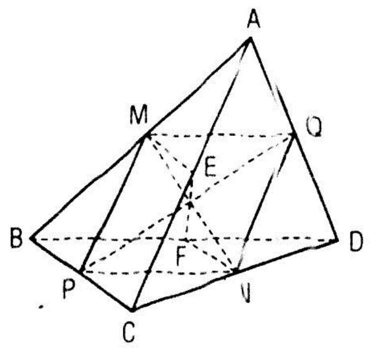
b) Các đoạn thẳng nối trung điểm cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau.

c) Các trọng tuyến (đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện) bằng nhau.

d) Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng 180^0

Giải

* Chứng minh a) $\Leftrightarrow$ b)



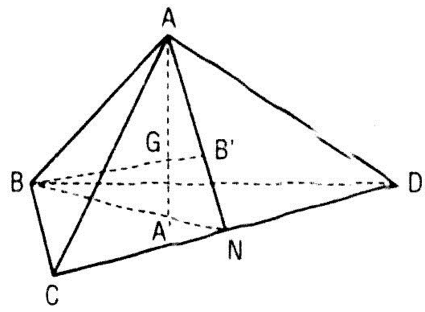
Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) $\Rightarrow$ b). Do AC = BD nên MPNQ là hình thoi, vì thế $MN \perp PQ$. Tương tự ta có $MN \perp EF$, $PQ \perp EF$.

b) $\Rightarrow$ a). MPNQ là hình bình hành mà $MN \perp PQ$ nên MPNQ là hình thoi, tức là MP = MQ, từ đó AC = BD.

Tương tự như trên ta cũng có BC = AD, AB = CD.

* Chứng minh a) $\Leftrightarrow$ c).



Gọi A', B' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD.

a) $\Rightarrow$ c). Ta có $\Delta BCD = \Delta ADC$ (c.c.c) nên BN = AN, từ đó A'N = B'N.
Vậy $\Delta AA'N = \Delta BB'N$ (c.g.c), suy ra AA' = BB'.
Tương tự như trên ta có điều phải chứng minh.

c) $\Rightarrow$ a). Do Giả thiết ta có BB' = AA', mà AA' cắt BB' tại G, AG = 3GA', BG = 3GB' (xem BT 22, chương II, SGK), từ đó BG = AG và GA' = GB'. Các tam giác BGA' và AGB' bằng nhau nên BA' = AB'. Như vậy BN = AN,

mà $$AC^2 + AD^2 = 2AN^2 + \frac{CD^2}{2},$$

$$BC^2 + BD^2 = 2BN^2 + \frac{CD^2}{2},$$

do đó $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$. (1)

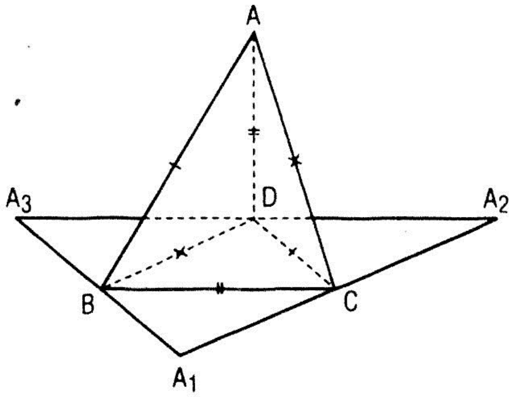
Tương tự như trên ta có :

$$CA^2 + CB^2 = DA^2 + DB^2. \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta suy ra AD = BC và AC = BD. Tương tự như trên ta cũng có AB = CD.

* Chứng minh a) $\Leftrightarrow$ d)

a) $\Rightarrow$ d). Do sự bằng nhau của các tam giác ABC, CDA, BAD với tam giác DCB nên tổng các góc tại B bằng 180^0.

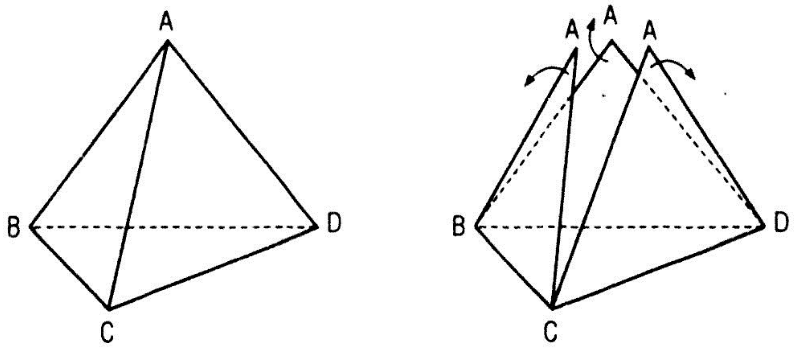


Đối với các đỉnh còn lại cũng được lí luận tương tự như trên.

d) $\Rightarrow$ a). Trải các mặt ABC, ACD, ABD lên mặt phẳng (BCD).

Do tổng các góc tại B cũng như tại C, tại D đều bằng 180^0 nên các bộ ba điểm $A_1, C, A_2; A_2, D, A_3; A_3, B, A_1$ là những bộ ba điểm thẳng hàng. Như vậy, BC, CD, BD là ba đường trung bình của tam giác $A_1A_2A_3$. Từ đó $BD = A_1C = CA_2 = CA$. Tương tự ta cũng có AD = BC, CD = AB.

8. *Cho tứ diện ABCD. Cắt tứ diện đó theo các cạnh AB, AC, AD và trải các mặt ABC, ACD, ADB lên mặt phẳng (BCD) (xem hình bên dưới). Hình phẳng gồm các tam giác BCD, A_1BC, A_2CD, A_3BD gọi là hình khai triển của tứ diện ABCD trên mặt phẳng (BCD).*



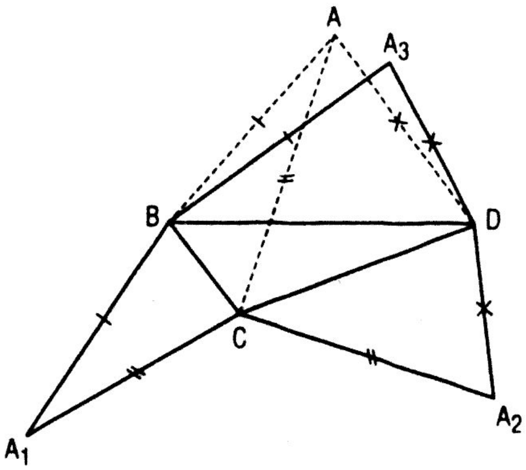
a) *b)*

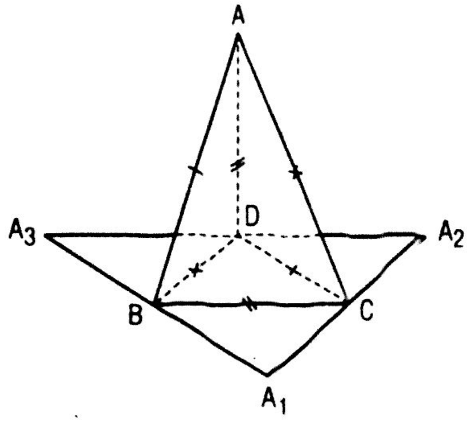
Giải

Theo phần chứng minh d) $\Rightarrow$ a) của bài 7 thì ta có hình khai triển của tứ diện ABCD trên mp(BCD) là tam giác $A_1A_2A_3$.

Ta chỉ cần chứng minh tam giác $A_1A_2A_3$ có ba góc nhọn.

Thật vậy, xét tam giác AA_1A_2 có $AC = A_1C = A_2C$ nên $AA_1 \perp AA_2$. Lí luận tương tự như trên, ta có AA_1, AA_2, AA_3 đôi một vuông góc, từ đó tứ diện $AA_1A_2A_3$ có mặt $A_1A_2A_3$ là tam giác có ba góc nhọn.





CÁC CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. *Cho hình tứ diện ABCD có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là sai ?*

(A). $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$; (B). $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

(C). $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$; (D). $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Trả lời

(A), (B) đúng.

Gọi G_1 là trọng tâm ΔBCD ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ nên (D) đúng. Vậy chọn (C)

2. *Mệnh đề nào sau đây là đúng ?*

(A). Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

(B). Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

(C). Một đường thẳng cùng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

(D). Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

Trả lời

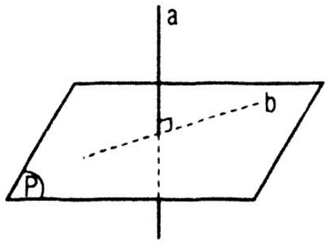
Chọn (C).

3. *Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?*

(A). Nếu $b \,//\, (P)$ thì $b \perp a$. *(B). Nếu $b \perp (P)$ thì $b \,//\, a$.*

(C). Nếu $b \,//\, a$ thì $b \perp (P)$. *(D). Nếu $b \perp a$ thì $b \,//\, (P)$.*

Trả lời



Nếu $b \perp a$ thì có thể $b \subset (P)$.

Chọn (D).

4. *Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:*

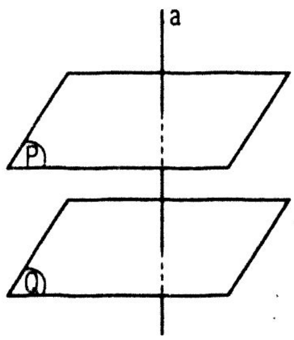
(A). Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

(B). Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

(C). Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

(D). Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Trả lời



$$\begin{cases}(P) \not\equiv (Q)\\ (P)\perp a\\ (Q)\perp a\end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$$

Chọn (C)

5. *Mệnh đề nào sau đây là đúng?*

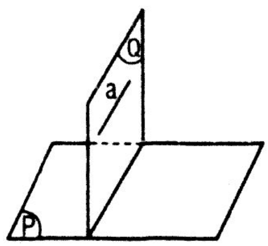
(A). Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

(B). Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

(C). Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(D). Ba mệnh đề trên đều sai.

Trả lời

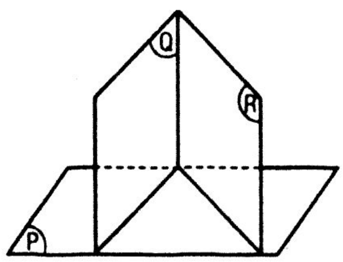


Chọn (D)

(A). Sai theo hình vẽ bên

$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\ a \subset (Q)\end{cases} \quad \text{nhưng } a//(P)$$

(B), (C) sai theo hình vẽ sau



6. *Trong các mệnh sau, mệnh đề nào đúng?*

(A). Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

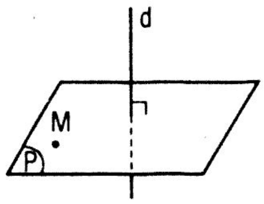
(B). Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

(C). Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

(D). Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Trả lời

Chọn (D).



7. *Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?*

(A). Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

(B). Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

(C). Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

(D). Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Trả lời

Chọn (D)

8. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?*

(A). Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

(B). Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

(C). Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

(D). Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Trả lời

Chọn (B).

9. *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:*

(A). S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân.

(B). S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân với đỉnh S.

(C). S.ABC là hình chóp đều nếu góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng chứa đáy bằng nhau.

(D). S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên có diện tích bằng nhau.

Trả lời

Chọn (B).

10. *Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :*

(A). Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia;

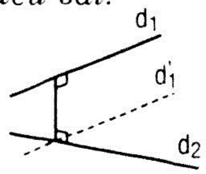
(B). Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia;

(C). Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó;

(D). Các mệnh trên đều sai.

Trả lời

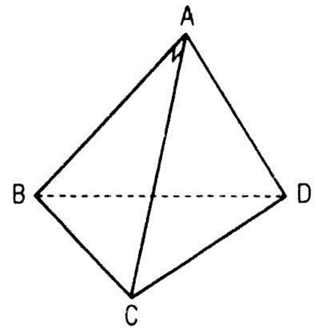
Chọn (B)



11. *Hình tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc và AB = AC = AD = 3. Diện tích tam giác BCD bằng*

(A). $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; *(B).* $\frac{9\sqrt{2}}{3}$; *(C).* 27 ; *(D).* $\frac{27}{2}$.

Trả lời



Chọn (A)

Ta có $BC = CD = BD = 3\sqrt{2}$

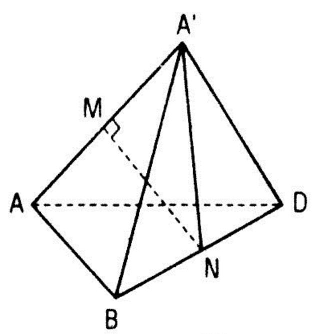
Tam giác BCD đều cạnh bằng $a = 3\sqrt{2}$ nên

$$S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{18\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

12. *Hình hộp ABCD.A'B'C'D' có* $AB = AA' = AD = a$ *và* $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^0$. *Khi đó, khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện A'ABD bằng :*

(A). $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; *(B).* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; *(C).* $a\sqrt{2}$; *(D).* $\frac{3a}{2}$.

Trả lời



Chọn (A).

Tứ diện A'ABD là tứ diện đều cạnh a.

M, N lần lượt là trung điểm AA', BD

MN là đoạn vuông góc chung của AA' và BD. Ta có :

$$MN^2 = A'N^2 - A'M^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

BÀI ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. *Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.*

a) Xét bốn tam giác APN, PBM, NMC, MNP. Tìm phép dời hình biến tam giác APN lần lượt thành một trong ba tam giác còn lại.

b) Phép vị tự nào biến tam giác ABC thành tam giác MNP ?

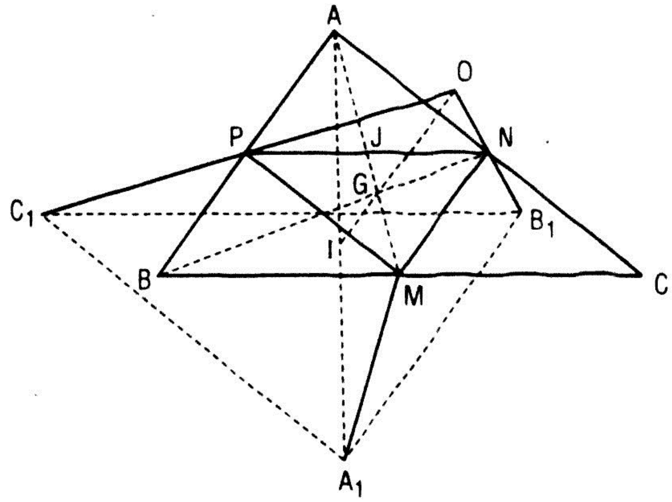
c) Xét tam giác có ba đỉnh là trực tâm của ba tam giác APN, PBM và NCM. Chứng tỏ rằng tam giác đó bằng tam giác APN. Chứng minh điều đó cũng đúng nếu thay trực tâm bằng trọng tâm, hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp, hoặc tâm đường tròn nội tiếp.

Giải

a) Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AP}}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM.

Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AN}}$ biến tam giác APN thành tam giác NMC.

Phép đối xứng tâm $Đ_J$, với J là trung điểm của PN, biến tam giác APN thành tam giác MNP.



b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Vậy phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

c) Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác APN, PBM, NMC. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AP}}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM nên biến H_1 thành H_2, tức là $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{AP}$ hay $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2}$. Tương tự ta có $\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{AN}$ hay $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{NH_3}$. Vậy $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2} = \overrightarrow{NH_3}$. Từ đó suy ra phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AH_1}$ biến tam giác APN thành tam giác $H_1H_2H_3$.

Đối với các trường hợp khác (trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp), chứng minh hoàn toàn tương tự.

2. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA. Kẻ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC.*

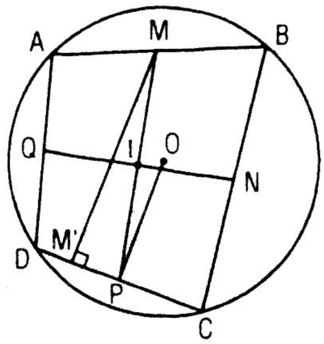
a) Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến các đường thẳng MM', NN', PP', QQ' thành những đường thẳng nào ?

b) Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét gì về vị trí điểm đồng quy và hai điểm I, O ?

Giải

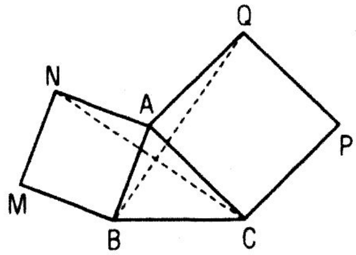
a) MNPQ là hình bình hành nên I là trung điểm của MP và NQ.

Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành điểm P, biến đường thẳng MM' thành đường thẳng đi qua P và song song với MM', tức là vuông góc với DC. Vậy đường thẳng MM' được biến thành đường thẳng PO. Hoàn toàn tương tự: đường thẳng NN' biến thành đường QO, đường thẳng PP' biến thành đường MO, đường thẳng QQ' biến thành đường NO.



b) Vì bốn đường thẳng MO, NO, PO, QO đồng quy tại O nên bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại O' đối xứng với O qua điểm I.

3. *Cho tam giác ABC và hai hình vuông ABMN, ACPQ như hình vẽ.*



a) Xác định phép quay biến tam giác ABQ thành tam giác ANC.

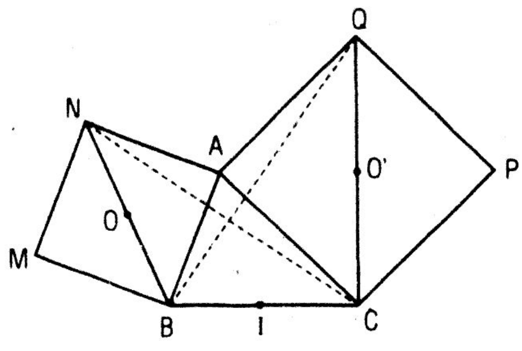
b) Chứng tỏ rằng hai đoạn thẳng BQ, CN bằng nhau và vuông góc với nhau.

c) Gọi O, O' là tâm của các hình vuông, I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác OIO' là tam giác vuông cân.

Giải

a) Ta có AB = AN, AQ = AC và góc (AB, AN) = (AQ, AC) = -90°.

Vậy phép quay tâm A, góc quay $\varphi = -90^\circ$ biến tam giác ABQ thành tam giác ANC.



b) Vì đoạn thẳng BQ biến thành đoạn thẳng NC nên BQ = NC và BQ $\perp$ NC.

c) Theo kí hiệu hình bên thì $OI \parallel NC,\ OI = \frac{1}{2}NC;$

$$O'I \parallel QB,\ O'I = \frac{1}{2}QB.$$

Vậy từ câu b) ta suy ra tam giác IOO' vuông cân tại đỉnh I.

4. *Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD; P là một điểm thay đổi trên đoạn thẳng AD.*

a) Xác định giao điểm Q của mp(MNP) và cạnh AC. Tứ giác MNPQ là hình gì?

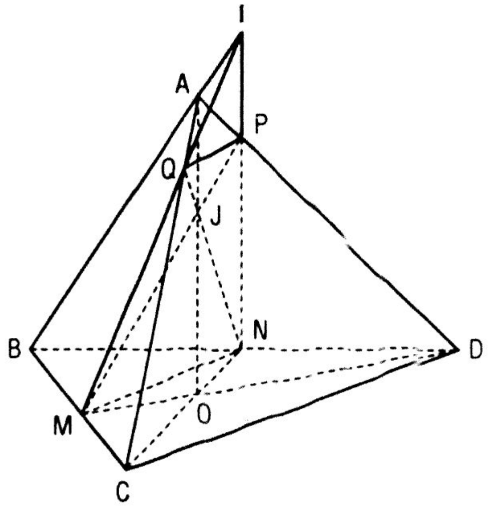
b) Tìm quỹ tích giao điểm I của QM và PN.

c) Tìm quỹ tích giao điểm J của QN và PM.

Giải

a) Kẻ đường thẳng qua P song song với CD cắt AC tại Q thì Q là giao điểm của AC và mp(MNP). Dễ thấy tứ giác MNPQ là hình thang (PQ // MN).

Chú ý: Nếu P ≡ A thì Q ≡ A ≡ P; nếu P ≡ D thì Q ≡ C.



b) *Thuận.* Giả sử I là giao điểm của QM và PN. Theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng (ABC), (ABD), (MNPQ) thì điểm I thuộc đường thẳng AB.

Vì P thay đổi trên đoạn thẳng AD nên dễ thấy I chỉ nằm trên phần của đường thẳng AB trừ đi các điểm trong đoạn thẳng AB.

Đảo. Lấy một điểm I bất kì thuộc đường thẳng AB nhưng không nằm giữa A và B. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của IN với AD, của IM với AC. Khi đó rõ ràng mp(MNP) cắt AC tại Q và giao điểm của QM và PN là I.

Kết luận. Quỹ tích giao điểm I của QM và PN là đường thẳng AB trừ đi các điểm trong đoạn thẳng AB.

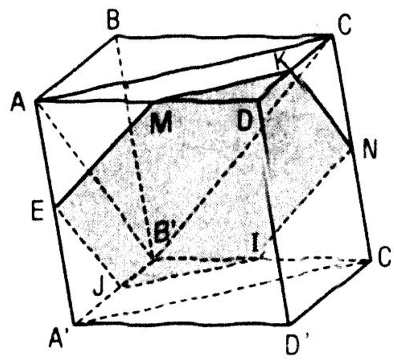
c) Tương tự như câu b), ta có quỹ tích giao điểm J của QN và PM là đoạn thẳng AO (O là giao điểm của DM và CN)

5. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Điểm M nằm giữa A và D, điểm N nằm giữa C và C' sao cho* $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mp(ACB').

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mp(ACB').

Giải



$$\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'} \Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AD}{CC'}.$$

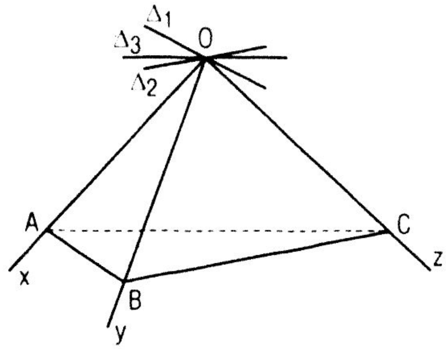
Theo định lí Ta-lét đảo thì MN song song mp(P), ở đó (P) song song với AC và DC'.

Mặt khác DC' // AB'. Vậy MN // (ACB').

b) Kẻ MK // AC ($K \in CD$); kẻ NI // CB' ($I \in C'B'$); kẻ IJ // A'C' ($J \in A'B'$); kẻ JE // AB' ($E \in AA'$). Thiết diện là lục giác MKNIJE.

6. *Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Chứng minh rằng các tia phân giác ngoài của các góc xOy, yOz và zOx đồng phẳng.*

Giải



Giả sử Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt là ba đường phân giác ngoài của các góc xOy, yOz, zOx. Nếu trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho OA = OB = OC thì dễ thấy Δ_1 // AB, Δ_2 // BC, Δ_3 // CA.

Vậy Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng phẳng.

7. *Cho hình chóp S.ABC. Gọi K và N lần lượt là trung điểm của SA và BC; M là điểm nằm giữa S và C.*

a) Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua K, song song với AB và SC thì đi qua điểm N.

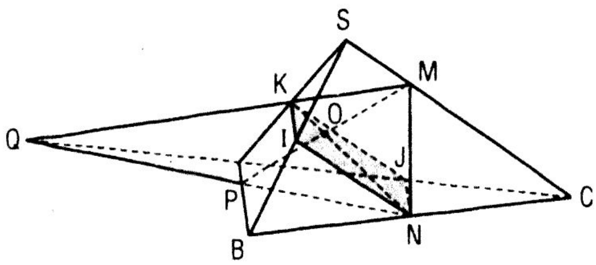
b) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(KMN). Chứng tỏ rằng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Giải

a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SB và AC thì dễ thấy các điểm K, I, N, J cùng thuộc mặt phẳng song song với AB và SC. Vậy câu a) được chứng minh.

b) Nếu M là trung điểm của SC thì thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(MKN) là hình bình hành, trong đó P là trung điểm của AB. Khi đó KN chia hình bình hành MKPN thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Nếu M không là trung điểm của SC. Gọi Q là giao điểm của KM và AC, P là giao điểm của QN và AB. Khi đó thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mp(MKN) là tứ giác MKPN.



Ta có : SC // (α) và AB // (α), đồng thời K là trung điểm SA nên :

$d(M, (\alpha)) = d(P, (\alpha)) \Rightarrow OP = OM$ (với O là giao điểm của PM và NK).

Do đó hai đường cao của hai tam giác MKN và PKN kẻ từ M và P bằng nhau, từ đó suy ra $S_{PKN} = S_{MKN}$.

8. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.*

a) Tính khoảng cách từ S đến mp(ABCD).

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mp(SCD).

c) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và SC.

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P). Tính diện tích thiết diện.

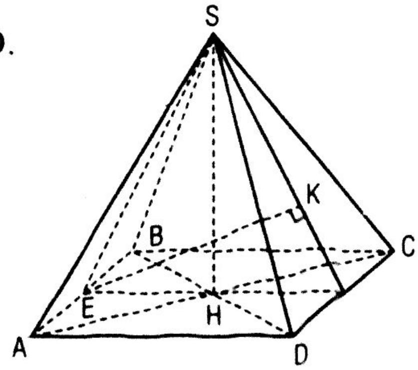
e) Tính góc giữa đường thẳng AB và mp(P).

Giải

Gọi H là giao điểm của AC và BD. Do S.ABCD là hình chóp đều nên SH vuông góc với mặt đáy (ABCD).

a) Khoảng cách từ S đến mp(ABCD) là SH.

SAC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $SH = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.



b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có d(AB; (SCD)) = d(E; (SCD)) = EK

(EK là đường cao của tam giác SEF).

$$EK = \frac{EF.SH}{SF} = \frac{a.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{\frac{6a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

c) Vì AB và SC chéo nhau, AB // mp(SCD) nên

$$d(AB; SC) = d(AB; (SCD)) = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

d) Gọi C_1 là trung điểm của SC, do SAC là tam giác đều nên $AC_1 \perp SC$. Mặt khác $BD \perp SC$, nên (P) chính là mặt phẳng chứa AC_1 và song song với BD. Kí hiệu H_1 là giao điểm của AC_1 và SH. Khi đó $(P) \cap (SBD) = B_1D_1$, trong đó B_1D_1 đi qua H_1 và song song với BD. Vậy thiết diện của S.ABCD cắt bởi (P) là tứ giác $AB_1C_1D_1$.

Ta có $BD \perp (SAC)$, B_1D_1 // BD nên

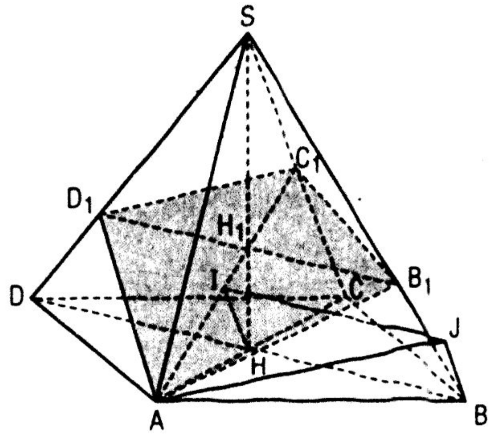
$B_1D_1 \perp (SAC)$, suy ra $B_1D_1 \perp AC_1$.

Từ đó $S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}AC_1.B_1D_1$.

$AC_1 = \frac{a\sqrt{6}}{2}, B_1D_1 = \frac{2}{3}BD$

(vì H_1 là trọng tâm tam giác SAC).

Vì vậy $S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.



e) Trong mp(SAC), kẻ HI song song với CC_1 cắt AC_1 tại I thì $HI \perp (P)$ vì $SC \perp (P)$.

Ta lấy điểm J sao cho BHIJ là hình bình hành thì $BJ \perp (P)$, từ đó $\widehat{BAJ}$ là góc giữa BA và mp(P) (hình trên).

$$\sin\widehat{BAJ} = \frac{BJ}{BA} = \frac{HI}{BA} = \frac{\frac{1}{2}CC_1}{BA} = \frac{\frac{1}{4}SC}{BA} = \frac{\frac{1}{4}a\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy góc giữa BA và mp(P) là α mà $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

9. *Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Hai tia Bx và Cy cùng vuông góc với mp(ABC) và nằm về một phía đối với mặt phẳng đó. Trên Bx, Cy lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho BB' = a, CC' = m.*

a) Với giá trị nào của m thì AB'C' là tam giác vuông?

b) Khi tam giác AB'C' vuông tại B', kẻ AH ⊥ BC. Chứng minh rằng B'C'H là tam giác vuông. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'C').

Giải

Ta có : $AC^2 = 3a^2, AB'^2 = 2a^2, AC'^2 = 3a^2 + m^2, B'C'^2 = 4a^2 + (m-a)^2$.

a) • Tam giác AB'C' vuông ở A khi và chỉ khi :

$5a^2 + m^2 - 2ma = 2a^2 + 3a^2 + m^2$.

Vậy tam giác AB'C' vuông ở A khi và chỉ khi m = 0.

• Tam giác AB'C' vuông ở C' khi và chỉ khi :

$2a^2 = 3a^2 + m^2 + 4a^2 + (m-a)^2$. Điều này không xảy ra.

• Tam giác AB'C' vuông ở B' khi và chỉ khi :

$2a^2 + 4a^2 + (m-a)^2 = 3a^2 + m^2 \Leftrightarrow m = 2a$.

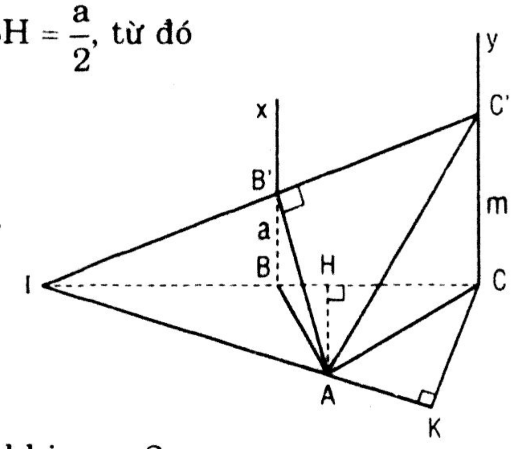
Vậy tam giác AB'C' vuông ở B' khi và chỉ khi m = 2a

b) Giả sử tam giác AB'C' vuông ở B', tức là m = 2a.

Vì AH ⊥ BC nên $BH.BC = AB^2 = a^2 \Rightarrow BH = \frac{a}{2}$, từ đó

$HC = \frac{3a}{2}$ và $B'H^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$;

$C'H^2 = \frac{9a^2}{4} + 4a^2 = \frac{25a^2}{4}; B'C'^2 = 5a^2$.



Như vậy :

$B'H^2 + B'C' = C'H^2$, tức là tam giác B'C'H vuông tại B'.

• Tính góc giữa mp(ABC) và mp(AB'C') khi m = 2a.

Gọi I là giao điểm của B'C' và BC. Do BB' // CC', BB' = a, CC' = 2a nên BC = BI, B'C' = B'I.

Xét phép chiếu lên mp(ABC). Ta có tam giác AIC là hình chiếu của tam giác AIC'. Gọi φ là góc giữa mp(ABC) và mp(AB'C') thì : $S_{AIC} = S_{AIC'} \cos\varphi$.

Ta có : $S_{AIC} = 2S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Mặt khác : $S_{AIC'} = \frac{1}{2}IC'.AB' = \frac{1}{2}.2a\sqrt{5}.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{10}$.

Từ đó : $\cos\varphi = \frac{a^2\sqrt{3}}{a^2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Vậy góc giữa mp(ABC) và mp(AB'C') là φ được tính bởi

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{30}}{10},\ 0^\circ < \varphi < 90^\circ.$$

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM BỔ SUNG

1. *Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (O), AB là một đường kính cố định của (O), M là một điểm di động trên (O). Gọi S là một điểm cố định sao cho SA vuông góc với (α). Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SM.*

a) Giả sử M khác với A và B. Chứng minh AK vuông góc với (SMB), SB vuông góc với (AKH).

b) Gọi (β) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB. Xác định giao tuyến d của (α) và (β).

c) Tìm tập hợp các điểm K khi M chạy khắp đường tròn (O).

d) Giả sử M chạy trên (O) và không trùng B. Gọi I là giao điểm của BM và HK. Tìm tập hợp các điểm I.

2. *Cho tứ diện đều SABC cạnh a. Gọi I là trung điểm của BC, M là điểm trên đoạn IS sao cho $\frac{IM}{IS} = \frac{3}{5}$*

a) Tính $\cos\widehat{AIS}$ và độ dài đoạn AM.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AM và song song với BC. Tính diện tích của thiết diện của tứ diện SABC với (α).

c) Tính khoảng cách từ I đến (α).

d) Tính góc giữa đường thẳng AB và (α).

3. *Cho tam giác đều SAD và hình vuông ABCD cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi I là trung điểm AD, M là trung điểm của AB, F là trung điểm của SB và K là giao điểm của CM và BI.*

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (CMF) vuông góc với mặt phẳng (SIB)

b) Tính BK và KF và suy ra rằng tam giác BKF cân.

c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SD.

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại : (04) 3971 4896 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**

Tổng biên tập : **PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập : Thu Hiền

Sửa bài : Tác giả

Trình bày : Ngọc Anh

Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng

Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11 NÂNG CAO

Mã số : 1L-166ĐH2010

In 3000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty CP In Tiền Giang.

Số xuất bản: 290-2010/CXB/17-50/ĐHQGHN, ngày 01/4/2010.

Quyết định xuất bản số : 166LK-TN/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.